Prof. Dr. K. Sibold
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Quantenmechanik
Aufgabenblatt 2

Aufgabe 4[Vollständigkeit der Wellenfunktionen]
Erlautern Sie den Bergrif der Vollständigkeit einer (unendlichen) Familie der Funktionen am folgenden Beispiel: betrachten Sie ein Teilchen auf dem Intervall $[0, \pi]$ mit

(a) Dirichlet-Randbedingung $\psi(0) = 0 = \psi(\pi)$,

(b) Neumann-Randbedingung $\psi'(0) = 0 = \psi'(\pi)$.

In beiden Fälle lösen Sie die Schrödinger-Gleichung

$$E\psi = -\psi'',$$

bestimmen Sie die Energieniveaus E_n und die zugehörige Wellenfunktionen $\psi_n(x)$. Normieren Sie diese Funktionen auf 1 (s. Auf. 5,6). Versuchen Sie mit Hilfe dieser Funktionen die folgende Funktionen (Distributionen) darzustellen:

$$f(x) = \delta(x - \pi/2), \tag{1}$$

$$g(x) = 1, \tag{2}$$

d.h. bestimmen Sie z.B. die Entwicklung

$$f(x) = \sum_n c_n \psi_n(x). \tag{3}$$

Wie gut können unstetige Funktionen mit Hilfe solcher Enwicklungen approximiert werden?

Aufgabe 5[Zu selbstadjungierten Randbedingungen]
Die Stationäre Schrödinger-Gleichung kann als ein Eigenwertproblem

$$\hat{H}\psi = E\psi, \qquad E \in \mathbb{R} \tag{4}$$

verstanden werden. Der Hamilton-Operator $\hat{H}$ muss "selbstadjungiert" sein, um reelle Energieeigenwerte E zu garantieren. Eine notwendige Bedingung dafür ist

$$(\psi_1, \hat{H}\psi_2) = (\hat{H}\psi_1, \psi_2), \tag{5}$$

mit

$$(\psi_1, \psi_2) = \int dx\, \overline{\psi_1(x)}\, \psi_2(x). \tag{6}$$

Betrachten Sie ein Teilchen auf einem Intervall $[0, 1]$ mit

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2}, \tag{7}$$

und zeigen Sie, dass die Selbstadjungiertheit von $\hat{H}$ äquivalent ($\Leftrightarrow$) zur Gleichheit des zu jeder Wellenfunktion ψ gehöriges Wahrscheinlichkeitflusses ist:

$$j_\psi(0) = j_\psi(1) \tag{8}$$

mit

$$j_\psi(x) = \frac{i\hbar}{2m}[\overline{\psi}'\psi - \overline{\psi}\psi'] \tag{9}$$

Aufgabe 6
Ein tiefes anziehendes Potential $V(x)$ wird durch die Delta-Distribution modelliert:

$$V(x) = -g\,\delta(x), \qquad g \in \mathbb{R}_+. \tag{10}$$

Zeigen Sie, dass die Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\,\psi = E\psi \tag{11}$$

zu

$$\psi'(0^-) - \psi'(0+) = \frac{2mg}{\hbar^2}\,\psi(0) \tag{12}$$

führt. (Um dies zu zeigen, muss die ursprüngliche Gleichung von $x = -\epsilon$ zu $x = \epsilon$ integriert und das Limit $\epsilon \to 0$ durchgeführt werden.)

Verwenden Sie diese Bedingung auf ψ um die Lösungen der Schrödinger-Gleichung für $E < 0$ (Bindungszustände) und $E > 0$ (Streuzustände) zu bestimmen. Im ersten Fall normieren Sie die Wellenfunktion auf 1, d.h. $(\psi, \psi) = 1$. Im letzten Fall betrachten Sie die von $-\infty$ herkommende Teilchen und berechnen Sie die Transmission- und Reflexions-Koeffizienten (Amplituden).

Abgabe: Am Donnerstag, den 30.10.2007 in der Vorlesung.