Prof. Dr. K. Sibold
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

**Inst. f. Theoretische Physik**

Wintersemester 2008/09

---

Übungen zur Quantenmechanik
Aufgabenblatt 1

---

**Aufgabe 1**[GDGl 2 Ordnung]
Erlautern Sie den Bergrif der linear-unabhñgigen Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Typ

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\psi}{dx}\right] + q(x)\psi = w(x)\psi.$$

Wieviele unabhängige Lösungen gibt es? Bestimmen Sie die unabhängige Lösungen der Gleichung

$$-\psi''(x) = E\psi(x)$$

für $E > 0$ und $E < 0$. Geben Sie (aus den Tafeln) die unabhängige Lösungen der Bessel-Gleichung

$$x^2\psi'' + x\psi' + (x^2 - 1)\psi = 0$$

und deren asymptotische Entwicklungen für $x \to 0$ und $x \to \infty$.

**Aufgabe 2**
Die Lagrange-Funktions eines System sei durch

$$L = f(y)\dot{x}^2 - \frac{1}{f(y)}\,\dot{y}^2$$

gegeben, wobei $f(y) = 1 - 1/y$ und z.B. $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Bestimmen Sie die Form der Energie, der kanonisch-konjugierten Impulse und der Hamiltonfunktion. Unter Verwendung der Erhaltungsgrößen lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen.

*Optionale Vereinfachung:* Zeigen Sie, dass die Energie (die in der Zeit konstant bleibt) auf $0$,$+1$ oder $-1$ durch Umparametrisierung der Zeit reskaliert werden kann. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen nur im Fall $E = 0$.

**Aufgabe 3**
Die Lagrangefunktion eines Teilchens habe die Form

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \lambda(\dot{x}y - x\dot{y})\,,$$

wobei $\lambda$ eine Konstante ist. Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für das Teilchen und die zu $x$, $y$ kanonisch konjugierten Impulse $p_x$, $p_y$. Welche Form hat die Energie und der Drehimpuls des Teilchens? Berechnen Sie die Hamiltonfunktion und geben Sie die Hamiltonschen Gleichungen an.

**Abgabe: Am Donnerstag, den 23.10.2007 in der Vorlesung.**