UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik

Übungsblatt 9

Musterlösungen

25 Aufgabe

𝔈s sei

$$R_\ell = r^\ell \cdot w_\ell. \tag{1}$$

Durch Einsetzen in die Hauptgleichung finden wir

$$w_\ell'' + \frac{2(\ell+1)}{r}\, w_\ell' = -k^2 w_\ell \tag{2}$$

oder

$$\frac{1}{r^2}\,\partial_r\left[r^2 \partial_r w_\ell\right] + \frac{2\ell}{r} \; = -k^2 w_\ell. \tag{3}$$

Es sei nun

$$u_\ell = \frac{1}{r}\,\frac{\partial w_\ell}{\partial r}. \tag{4}$$

Wir leiten Gl. (3) nach r ab und erhalten

$$u_\ell'' + \frac{2(\ell+2)}{r}\, u_\ell' = -k^2 u_\ell \tag{5}$$

was aber identisch mit der Gleichung (3) f¸r $w_{\ell+1}$ ist; die w_ℓ können deshalb aus w_0 induktiv berechnet werden:

$$R_\ell = r^\ell \cdot \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^\ell w_0. \tag{6}$$

Zur Berechnung von $R_0 = w_0$ lohnt es sich den Ansatz

$$R_0 = \frac{f}{r} \tag{7}$$

in die Hauptgleichung einzusetzen. Wir erhalten

$$f'' = -k^2 f, \tag{8}$$

mit zwei unabhängigen Lösungen:

$$f_1 = \sin(kr), \qquad f_2 = \cos(kr). \tag{9}$$

Wie in der Theorie der Laplace-Gleichung muss f_2 ausgeschlossen werden, denn

$$-\nabla^2 \left(\frac{f_2}{r} \right) \neq -k^2 \frac{f_2}{r}. \tag{10}$$

Wir haben die folgenden Lösungen gefunden:

$$R_0 = \frac{\sin(kr)}{kr} \qquad R_\ell = r^\ell \cdot \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right]^\ell R_0. \tag{11}$$

Insbesondere

$$R_1 = \partial_r R_0. \tag{12}$$

𝔇ie Energieniveaus der Kugelsymmetrischen Zustände im Fall des Randwertproblems $R(\pi) = 0$ erhalten wir aus

$$R_0(\pi) = \frac{\sin(k\pi)}{\pi} = 0, \tag{13}$$

d.h.

$$k \in \mathbb{N}_+, \quad E = k^2. \tag{14}$$

26 Aufgabe

Sei $J^2 = \delta^{ab} J_a J_b$. Es gilt

$$[J^2, J_d] = \delta^{ab} \left(J_a [J_b, J_d] + [J_a, J_d] J_b \right) = \delta^{ab} \left(J_a i\epsilon_{bdc} J^c + i\epsilon_{adc} J^c J_b \right) = i(\epsilon_{adc} + \epsilon_{cda}) J^a J^c = 0. \tag{15}$$

Wir finden sofort, dass

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm. \tag{16}$$

Wegen

$$J_+ J_- = J_1^2 + J_2^2 - i[J_1, J_2] = J_1^2 + J_2^2 + J_3 = J^2 - J_3^2 + J_3 \tag{17}$$

finden wir

$$J_+ J_- = J^2 - J_3(J_3 - 1) \tag{18}$$

und analog

$$J_- J_+ = J^2 - J_3(J_3 + 1) \tag{19}$$

Es sei nun ψ_m ein Eigenvektor von J^2 und J_3 wie in der Gl. (6) der Aufgabe 26. Aus den Vertauschungsrelationen (16) finden wir

$$J_3(J_+ \psi_m) = (m+1)(J_+ \psi_m), \qquad J_3(J_- \psi_m) = (m-1)(J_+ \psi_m), \tag{20}$$

J_+ (J_-) erhöht (erniedrigt) den Eigenwert von J_3 um 1 (und wegen $[J_\pm, J^2] = 0$ hat kein Einfluss auf den Eigenwert von J^2).

Die Anwendung von $J_\pm$ zur Bestimmung von neuen Eigenwektoren von (J^2, J_3) hat aber seine

Ende: wegen

$$\|J_+\psi_m\|^2 = (J_+\psi_m, J_+\psi_m) = (\psi_m, J_-J_+\psi_m) = (\psi_m, \{J^2 - J_3(J_3+1)\}\psi_m) = \{\lambda - m(m+1)\}\|\psi_m\|^2 \tag{21}$$

und

$$\|J_-\psi_m\|^2 = \ldots = \{\lambda - m(m-1)\}\|\psi_m\|^2, \tag{22}$$

muss ein Vektor ψ_M (mit $J_3\psi_M = M\psi_M$) existieren, f¸r den

$$\lambda - M(M+1) = 0. \tag{23}$$

Wir wählen jetzt $m = M$ und wenden $k = 2M$-mal J_- darauf. Somit erhalten wir einen Vektor, der proportional zu ψ_{-M} wird (also mit $m = -M$). Nun

$$\lambda - m(m-1) = \lambda + M(-M-1) = 0, \tag{24}$$

d.h. $J_-\psi_{-M} = 0$. Die einzige Einschränkung auf die Zahl M ist, dass $M = k/2$, k: ganzzahlig. Jeder Sektor zu $M = k/2$ besitzt also $k+1$ Vektoren zu den Eigenwerten $m = [-M, M]$ von J_3 und $\lambda = M(M+1)$ von J^2.

27 Aufgabe

𝔇ie in der Aufgabenstellung gegebene Form der Operatoren $L_\pm$ ist falsch; sie soll durch

$$L_+ = e^{i\varphi}(\partial_\theta + i\cot\theta\,\partial_\varphi), \tag{25}$$

$$L_- = e^{-i\varphi}(-\partial_\theta + i\cot\theta\,\partial_\varphi) \tag{26}$$

ersetzt werden. Sei $\psi_\pm \stackrel{\text{def}}{=} \psi_{\pm 1}$. Aus der Gleichung

$$L_z\psi_\pm = -i\partial_\varphi\psi_\pm = \pm\psi_\pm \tag{27}$$

erhalten wir

$$\psi_\pm = f_\pm(\theta)\cdot e^{\pm i\varphi}. \tag{28}$$

Die Differentialgleichungen zur Bestimmung von $f_\pm(\theta)$, $L_\pm\psi_\pm = 0$ erweisen sich identisch zu sein:

$$f'_\pm = \cot\theta\, f_\pm \tag{29}$$

d.h.

$$f_\pm = const\cdot\sin(\theta), \tag{30}$$

und damit

$$\psi_\pm = const\cdot\sin(\theta)e^{\pm i\varphi}. \tag{31}$$

Diese Funktionen entsprechen den Kugelflächefuntionen, $Y_{1\pm 1} \simeq \psi_\pm$:

$$Y_{1\,\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sin(\theta)e^{\pm i\varphi}. \tag{32}$$

28 Aufgabe

(Teil I): Wir bestimmen zunächst die Gestalt der Operatoren $S_\pm$

$$S_\pm = S_1 \pm iS_2 = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{33}$$

Aus $S_+\psi_{+1/2}$ folgt (bis auf die Phase)

$$\psi_{+1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{34}$$

und auch $S_3\psi_{+1/2} = \frac{1}{2}\psi_{+1/2}$. Wir erhalten sofort

$$\psi_{-1/2} = S_-\psi_{+1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

sodass $S_-\psi_{-1/2} = 0$ und $S_3\psi_{-1/2} = -\frac{1}{2}\psi_{-1/2}$.

(Teil II): In diesem Fall gilt

$$T_\pm = T_1 \pm iT_2 = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & i & -1 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{36}$$

Aus der Gleichung $T_+\psi_+$ folgt (wieder bis auf die multiplikative Phase)

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(0, 1, -i)^T, \tag{37}$$

sodass $T_3\psi_+ = \psi_+$. Weiterhin gilt

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,T_-\psi_+ = (i, 0, 0)^T, \tag{38}$$

$$\psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\, T_-\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(0,1,i)^T. \tag{39}$$

(Die Vorfaktoren wurden aus Normierungsgründen eingeführt.) Man verifiziert leicht die notwendigen Eigenschaften:

$$T_3\psi_0 = 0, \qquad T_3\psi_- = -\psi_-. \tag{40}$$

29 Aufgabe

Als erstes berechnen wir die Matrixelemente von x^2 und z^2. In den Rechnungen führen wir zunächst die φ-Integration durch, und dann die θ-Integration. Wir haben

$$|\pm\rangle \stackrel{\text{def}}{=} Y_{1\,\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sin\theta e^{\pm i\varphi}, \tag{41}$$

$$|0\rangle \stackrel{\text{def}}{=} Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\theta. \tag{42}$$

und

$$x = \sin\theta\cos\varphi, \tag{43}$$

$$y = \sin\theta\sin\varphi, \tag{44}$$

$$z = \cos\theta. \tag{45}$$

In den Matrixelementen alle Summanden die durch $e^{in\varphi}$, $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, von φ abhängen verschwinden. Somit erhalten wir

$$(+, z^2\, 0) = (-, z^2\, 0) = (+, z^2\, -) = 0, \tag{46}$$

$$(+, x^2\, 0) = (-, x^2\, 0) = 0, \tag{47}$$

wegen $x^2 = \sin^2\theta(2 + e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi})/4$. Weiterhin gilt

$$(+, z^2\, +) = (-, z^2\, -) = \frac{3}{8\pi}\ \cdot 2\pi \underbrace{\int d\theta \sin\theta\ \sin^2\theta\ \cos^2\theta}_{=4/15} = \frac{1}{5} \tag{48}$$

$$(0, z^2\, 0) = \frac{3}{4\pi}\ \cdot 2\pi \underbrace{\int d\theta \sin\theta\ \cos^2\theta\ \cos^2\theta}_{=2/5} = \frac{3}{5} \tag{49}$$

$$(+, x^2\, +) = (-, x^2\, -) = \frac{3}{8\pi} \underbrace{\int d\theta \sin\theta\ \sin^2\theta\ \sin^2\theta \cdot \cos^2\varphi}_{=(16/15)\cdot\pi} = \frac{1}{5} \tag{50}$$

$$(0, x^2\, 0) = \frac{3}{4\pi}\,\pi \underbrace{\int d\theta \sin\theta\ \cos^2\theta\ \sin^2\theta}_{=4/15} = \frac{1}{5} \tag{51}$$

$$(+, x^2 -) = -\frac{3}{8\pi}\,(\pi/2) \underbrace{\int d\theta \sin\theta\, \sin^2\theta\, \sin^2\theta}_{=16/15} = -\frac{1}{5}. \tag{52}$$

(Alle θ-Integrationen sind elementar, und können z.B. mit der Substitution $u = \cos\theta$ berechnet werden.)

Die Matrixelemente der Operatoren x und z können auch systematisch wie oben berechnet werden; es gibt aber eine einfache Überlegung, die zeigt, dass sie *alle verschwinden*. Wir betrachten die Paritäts-Transformation, $P : \vec{x} \to -\vec{x}$, d.h. $\theta \to \pi - \theta, \varphi \to \pi + \varphi$. Es gilt

$$PY_{1m} = -Y_{1m}, \tag{53}$$

und $P^2 = \mathbb{I}$. Wir finden

$$(\psi, \vec{x}\chi) = (P\psi, \vec{x}P\chi) = (\psi, P\vec{x}P\chi) = -(\psi, \vec{x}\chi), \tag{54}$$

also $(\psi, \vec{x}\chi) = 0$, wobei ψ, χ beliebig aus der Familie Y_{1m} gewählt werden können.