UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
Quantenmechanik

Übungsblatt 8
Musterlösungen

21 Aufgabe

Wir verwenden die Vollständigkeit der Energie-Eigenfunktionen und schreiben

$$f(x) = \sum_n c_n \psi_n(x) + \int dk\, c(k) \psi_k(x)$$

wobei mit $\psi_n(x)$ die Bindungszustände, mit $\psi_k(x)$ die Streuzustände bezeichnet werden. Die Normiertheit von f bedeutet

$$(f, f) = \sum_n |c_n|^2 + \int dk\, |c(k)|^2 = 1$$

Offensichtlich gilt nun

$$Hf(x) = \sum_n c_n E_n \psi_n(x) + \int dk\, c(k) E(k) \psi_k(x)$$

und damit

$$(f, Hf) = E_0 |c_0|^2 + \sum_{n \neq 0} E_n |c_n|^2 + \int dk\, E(k) |c(k)|^2$$

Wegen $E_0 < E_n < E(k)$ gilt somit

$$(f, Hf) \geq E_0 \left(|c_0|^2 + \sum_n |c_n|^2 + \int dk\, |c(k)|^2 \right) = E_0.$$

Die Funktion

$$\psi_a = (a/\pi)^{1/4} e^{-ax^2} \tag{1}$$

stellt eine normierte Testfunktion dar, die aber keine Eigenfunktion von H ist. Wir finden:

$$(\psi_a, V(x)\psi_a) = -g\sqrt{a/\pi}, \qquad (\psi_a, -\psi_a'') = (\psi_a', \psi_a') = \frac{a}{2}, \tag{2}$$

d.h.

$$(\psi_a, H\, \psi_a) = \left[\frac{\hbar^2}{4m}\right] a - \left[\frac{g}{\sqrt{\pi}}\right] a^{1/2} \tag{3}$$

Der Parameter "a" kann noch frei gewählt werden; jedes a liefert eine Abschätzung (von oben) der Grundzustandsenergie E_0. Für

$$a^{1/2} = \frac{2m\sqrt{\pi}}{g\hbar^2} \tag{4}$$

ergibt sich eine besonders niedrige Schranke

$$E_0 \leqslant -\frac{mg^2}{\hbar^2}\frac{1}{\pi}. \tag{5}$$

Natürlich, muss diese Abschätzung immer (für alle g, m) erfüllt sein; aus Auf. 6:

$$E_0 = -\frac{mg^2}{\hbar^2}\frac{1}{2}. \tag{6}$$

22 Aufgabe

Zunächst gilt

$$H = a^*a + b^*b \tag{7}$$

mit

$$a = \frac{x + ip_x}{\sqrt{2}}, \qquad b = \frac{y + ip_y}{\sqrt{2}}. \tag{8}$$

Weiterhin kann der $\varphi-$Ableitungsoperator durch a's und b's ausgedrückt werden:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = x\partial_y - y\partial_x = \left(\frac{a + a^*}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{b - b^*}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{b + b^*}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{a - a^*}{\sqrt{2}}\right) = a^*b - ab^*,$$

wobei die Orts- und Impulsoperatoren auch durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausgedrückt worden sind. Nun muss offensichtlich $[a, b] = 0 = [a, b^*]$ wegen $\partial_x(y) = 0 = \partial_y(x)$. Damit erhalten wir

$$J = i(b^*a - a^*b).$$

Dieser Operator ist selbstadjungiert weil a^* adjungiert zu a und b^* adjungiet zu b sind. Unter Benutzung der bekannten Kommutationsregeln $[a, a^*] = 1 = [b, b^*]$ finden wir unmittelbar

$$\begin{aligned}
[J, a] &= ib, \\
[J, b] &= -ia.
\end{aligned}$$

(Die übrigen Kommutatoren folgen via hermitischer Konjugation der obigen Regeln.)

Der Grundzustand des Systems wird durch

$$a\psi_0 = 0 = b\psi_0 \tag{9}$$

definiert. Wir finden sofort, dass die Wellenfunktion des Grundzustands

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(x^2+y^2)/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-r^2/2} \tag{10}$$

zylinder-symmetrisch ist. Es lässt sich sofort verifizieren, dass $\psi_+ = \frac{a^*+ib^*}{\sqrt{2}}\psi_0$ ein Eigenzustand von J zum Eigenwert $+1$ ist, und dass $\psi_a = a^*\psi_0$ kein Eigenzustand von J ist.
Um die Situation etwas tiefer zu verstehen definieren wir zwei Operatoren

$$J_+ = \frac{a^* + ib^*}{\sqrt{2}} \qquad J_- = \frac{a - ib}{\sqrt{2}}, \tag{11}$$

die die folgenden Kommutationsregeln genügen:

$$[J, J_-] = -J_-, \qquad [J, J_+] = J_+, \qquad [J_-, J_+] = 1, \qquad (J_-)^\dagger = J_+. \tag{12}$$

Es sei ψ_m ein Eigenzustand von J zum Eigenwert m; offensichtlich sind $J_+\psi_m$ und $J_-\psi_m$ auch Eigenzustände von J zu den Eigenwerten, entsprechend, $(m+1)$ und $(m-1)$.

Der Grundzustand ist ein Eigenzustand von J zum Eigenwert 0, und daher muss $\psi_+ = J_+\psi_0$ ein Eigenzustand zum Eigenwert $+1$ sein. Wegen

$$Ja^*\psi_0 = ib^*\psi_0 \tag{13}$$

ist ψ_a kein Eigenzustand von J.

Wir bemerken auch, dass zusätzlich auch die Operatoren

$$D_+ = \frac{a^* - ib^*}{\sqrt{2}} \qquad D_- = \frac{a + ib}{\sqrt{2}}, \tag{14}$$

definieret werden können (etwa $b \to -b$ in den Formeln für $J_\pm$ und J), mit den Kommutationsregeln:

$$[J, D_-] = D_-, \qquad [J, D_+] = -D_+, \qquad [D_-, D_+] = 1, \qquad (D_-)^\dagger = D_+. \tag{15}$$

Es folgt, dass D_- und J_+ (D_+ und J_-) erhöhen (erniedrigen) den Eigenwert von J. Dabei erzeugen J_+ und D_+ Anregungen der Oszillator die von J_- und D_- vernichtet werden können. Wegen

$$[J_+, D_+] = 0, \qquad [J_+, D_-] = 0 \tag{16}$$

sind die von J_+ und D_+ erzeugte Anregungen unabhängig[1].

[1] Im gleichen Sinne, wie die durch a^* erzeugten Anregungen (Schwingungen in $x-$Richtung) unabhängig von den durch b^* erzeugten Anregungen (Schwingungen in $y-$Richtung) sind.

23 Aufgabe

Wir finden sofort, dass

$$[H, J] = 0. \tag{17}$$

Der Raum der 1-mal angeregten Zustände, $\mathcal{H}_1$, ist zweidimensional, und wird z.B. durch

$$\{a^*\psi_0, b^*\psi_0\} \tag{18}$$

aufgespannt. Nun die Zustande $D_+\psi_0$ und $J_+\psi_0$ sind auch 1-mal angeregt und orthogonal. Sie bilden also auch eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_1$. Diese Vektoren sind auch eigenvektoren von J:

$$J(D_+\psi_0) = -(D_+\psi_0), \qquad J(J_+\psi_0) = +(J_+\psi_0). \tag{19}$$

Der Raum der n-mal angeregten Zustände, $\mathcal{H}_n$ wird zunächst durch die (normierten) Vektoren

$$\psi_{kl} = \frac{(a^*)^k (b^*)^m}{\sqrt{k!m!}}\,\psi_0, \qquad k + m = n \tag{20}$$

aufgespannt. Dieser Raum ist $n+1$ dimensional (das Energieniveau E_n ist also $n+1$ mal entartet). Die Orthonormalbasis der *Eigenzustände* von J wird von den Vektoren

$$\chi_{KM} = \frac{(J_+)^K (D_+)^M}{\sqrt{K!M!}}\,\psi_0, \qquad M + K = n \tag{21}$$

aufgespannt. Es gilt

$$J\chi_{MK} = (M - K)\chi_{MK}. \tag{22}$$

Wir finden

$$\psi_a = a^*\psi_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,xe^{-r^2/2}, \tag{23}$$

$$\psi_+ = J_+\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{i\varphi}re^{-r^2/2}. \tag{24}$$