UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik

Übungsblatt 7

Musterlösungen

19 Aufgabe

Wir haben: $[a, a^*] = 1$, $[a, (a^*)^2] = 2a^*]$, $[a, (a^*)^3] = 3(a^*)^2$, und es lässt sich unter Verwendung von $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ induktiv sofort beweisen, dass

$$[a, (a^*)^n] = n(a^*)^{n-1}. \tag{1}$$

Wegen Linearität des Kommutators gilt

$$[a, e^{\lambda a^*}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} [a, (a^*)^n] = \ldots = \lambda e^{\lambda a^*}. \tag{2}$$

Es sei nun ψ_0 normiert, und sei $\psi_n = N_n (a^*)^n \psi_0$. Wir finden

$$(\psi_n, \psi_n) = N_n^2 (\psi_0, a^n (a^*)^n \psi_0) = N_n^2 n (\psi_0, a^{n-1} (a^*)^{n-1} \psi_0) = \ldots = N_n^2 n! (\psi_0, \psi_0) = 1, \tag{3}$$

also $N_n = 1/\sqrt{n!}$, d.h. die Vektoren

$$\psi_n = \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} \psi_0 \tag{4}$$

sind auch normiert. Schliesslich

$$a\psi_n = \frac{a (a^*)^n}{\sqrt{n!}} \psi_0 = \frac{(a^*)^n a + n(a^*)^{n-1}}{\sqrt{n!}} \psi_0 = \sqrt{n}\psi_{n-1}, \tag{5}$$

und analog

$$a^* \psi_{n-1} = \sqrt{n}\, \psi_n. \tag{6}$$

Wir sehen sofort, dass auch die folgende Formel

$$a^* a\, \psi_n = n\, \psi_n \tag{7}$$

gültig ist.

In der Aufgabe 18 wurde argumentiert, dass alle normierbaren Eigenzustände des Hamiltonoperators bereits in der Familie $\{\psi_n\}$ liegen. Die Existenz der Streuzustände ist per Annahme ausgeschlossen[1]. Alle Bindungszustände mussen normierbar sein. Die Familie der Eigenvektoren eines selbstadjungierten Operators ist nach Spektralsatz vollständig, was in unserem Fall bedeutet, dass die Familie $\{\psi_n\}$ vollständig sein muss.

20 Aufgabe

Per Definition gilt:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a + a^*), \qquad p = \frac{i}{\sqrt{2}}\,(a^* - a). \tag{8}$$

In dieser Aufgabe wird das folgende Argument oft verwendet: die Ausdrücke der Form

$$(\psi_0, a^n (a^*)^m \psi_0) \tag{9}$$

verschwinden wenn $n \neq m$; dieses Argument gilt allgemein, sogar wenn die Reihenfolge der Operatoren anderes ist, z.B.

$$(\psi_0, a^n a^* a (a^*)^m \psi_0) \tag{10}$$

verschwindet auch, wenn $n \neq m$.

Unter Verwendung dieses Arguments finden wir zunächst, dass $\langle x \rangle_{\psi_n} = 0 = \langle p \rangle_{\psi_n}$ und auch

$$(\psi_n, x^2\, \psi_{n-1}) = 0 = (\psi_n, p^2\, \psi_{n-1}). \tag{11}$$

Weiterhin gilt

$$(\psi_n, x^2\, \psi_n) = \frac{1}{2}\,(\psi_n, [a^2 + (a^*)^2 + aa^* + a^*a]\,\psi_n) = (\psi_n, [a^*a + 1/2]\psi_n) = n + 1/2. \tag{12}$$

Analog

$$(\psi_n, p^2\, \psi_n) = n + 1/2. \tag{13}$$

Für die “off-diagonale” Matrixelemente der x und p Operatoren finden wir

$$(\psi_n, x\psi_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\psi_n, [a + a^*]\psi_{n-1}) = \sqrt{\frac{n}{2}} \tag{14}$$

und

$$(\psi_n, p\psi_{n-1}) = i\sqrt{\frac{n}{2}}\,. \tag{15}$$

21 Aufgabe

Per Annahme

$$\psi(t = 0) = \frac{\psi_0 + \psi_1}{\sqrt{2}}. \tag{16}$$

[1] Diese Annahme ist nicht nötig; In der nichtrelativistischen Quantenmechanik gibt es tatsächlich keine Streuzustände des harmonischen Potentials.

Die ψ_0 und ψ_1 haben als stationäre Zustände eine einfache Form der Zeitentwicklung:

$$\psi_0 \to e^{-it\omega(1/2)}\psi_0, \qquad \psi_1 \to e^{-it\omega(1+1/2)}\psi_1. \tag{17}$$

Wir finden also

$$\psi(t) = \frac{e^{-i\omega t/2}}{\sqrt{2}} \left[\psi_0 + e^{-i\omega t}\psi_1\right]. \tag{18}$$

Für die Erwartungswerte ergibt sich

$$\langle x\rangle_\psi = \frac{1}{2} \left(\psi_0 + e^{-i\omega t}\psi_1, [a + a^*][\psi_0 + e^{-i\omega t}\psi_1]\right) = \ldots = \cos(\omega t), \tag{19}$$

und

$$\langle p\rangle_\psi = \frac{i}{2} \left(\psi_0 + e^{-i\omega t}\psi_1, [a^* - a][\psi_0 + e^{-i\omega t}\psi_1]\right) = \ldots = -\sin(\omega t), \tag{20}$$

das heißt

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \langle p\rangle \cdot \omega \tag{21}$$
$$\frac{d}{dt}\langle p\rangle = -\langle x\rangle \cdot \omega, \tag{22}$$

In den dimensionsbehafteten Größen, $\hat{x} = \sqrt{\omega\hbar/k}, \hat{p} = \sqrt{\hbar\omega m}$, sind diese Gleichungen den bekannten Bewegungsgleichungen des klassischen harmonischen Oszillators,

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{x}\rangle = \langle \hat{p}\rangle/m \tag{23}$$
$$\frac{d}{dt}\langle \hat{p}\rangle = -k\langle \hat{x}\rangle, \tag{24}$$

ähnlich. Allgemein in der Quantenmechanik gilt

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle_\psi = \frac{1}{i\hbar}\langle [A,H]\rangle_\psi + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle_\psi \tag{25}$$

(Ehrenfest-Theorem; der Zustant ψ ist beliebig). Für

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \tag{26}$$

bedeutet das insbesondere

$$\frac{d}{dt}\langle p\rangle_\psi = \frac{1}{i\hbar}\langle [p, V(x)]\rangle_\psi = -\langle \tfrac{dV(x)}{dx}\rangle_\psi. \tag{27}$$

Im diesen Sinne bewegt sich das quantenmechanische Wellenpaket entlag der klassischen Trajektorien.