UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik

Übungsblatt 6

Musterlösungen

17 Aufgabe

Wir verwenden die Bezeichnung $\mu = kR$, sowie

$$S = e^{ikR} = e^{i\mu} \tag{1}$$

und $\alpha = mg$. Da es sich hier um zwei Delta-Potentiale handelt wird es zwei Stetigkeitsbedingungen (der Wellenfunktion) und zwei Unstetigkeitsbedingungen (der Ableitung der Wellenfunktion) geben. Wir nehmen den Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + \rho e^{-ikx} & x < -R \\ Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & |x| < R \\ \sigma e^{ikx} & x > R. \end{cases} \tag{2}$$

Aus der Stetigkeitsbedingungen, die wie folgt lauten:

$$\overline{S} + \rho S = A\overline{S} + BS, \tag{3}$$

$$\sigma S = AS + B\overline{S}, \tag{4}$$

schliessen wir unmittelbar, dass

$$A = \frac{\sigma S^2 - \overline{S}^2 - \rho}{S^2 - \overline{S}^2}, \qquad B = \frac{\rho S^2 + 1 - \sigma}{S^2 - \overline{S}^2}. \tag{5}$$

Die Bedingungen für die Ableitungen,

$$ik(\overline{S} - \rho S) - ik(A\overline{S} - BS) = 2\alpha(A\overline{S} + BS), \tag{6}$$

$$ik(AS - B\overline{S}) - ik(\sigma S) = 2\alpha(AS + B\overline{S}), \tag{7}$$

erlauben uns die Refleksion- und Transmission-Amplituden als Funktionen von μ und α auszudrücken. Wir finden zunächst:

$$\sigma\overline{S} - \rho S - \overline{S} = \frac{\alpha}{ik}\,\left[\sigma(S^3 - \overline{S})\right], \tag{8}$$

$$\sigma S - \rho\overline{S} - S = -\frac{\alpha}{ik}\,\left[\rho(S^3 - \overline{S}) + S - \overline{S}^3\right]. \tag{9}$$

und dann

$$e^{2i\delta_1} = \sigma + \rho = \frac{\frac{i\alpha}{k}\,[-S + \overline{S}^3] + S - \overline{S}}{\frac{i\alpha}{k}\,[\overline{S} - S^3] + S - \overline{S}} = \frac{\mu - i\beta\cos\mu\, e^{-i\mu}}{\mu + i\beta\cos\mu\, e^{i\mu}} \tag{10}$$

und

$$e^{2i\delta_2} = \sigma - \rho = \frac{\frac{i\alpha}{k}[S - \overline{S}^3] + S + \overline{S}}{\frac{i\alpha}{k}\,[S^3 - \overline{S}] + S + \overline{S}} = \frac{\mu + \beta\sin\mu\, e^{-i\mu}}{\mu + \beta\sin\mu\, e^{i\mu}} \tag{11}$$

mit $\beta = -2\alpha R$. Wir beobachten, dass die beiden Ausdrücke tatsächlich in Norm gleich 1 sind (Phasen). Darüberhinaus sieht man auch, dass sie sich als

$$\sigma + \rho = \frac{\varphi_1(-\mu)}{\varphi_1(\mu)} \tag{12}$$

$$\sigma - \rho = \frac{\varphi_2(-\mu)}{\varphi_2(\mu)} \tag{13}$$

mit

$$\varphi_1(\mu) = \frac{1}{\mu}\,\left[\mu + \beta\sin\mu\, e^{i\mu}\right] \tag{14}$$

$$\varphi_2(\mu) = \frac{1}{\mu}\,\left[\mu + i\beta\cos\mu\, e^{i\mu}\right] \tag{15}$$

schreiben lassen[1]. Wir finden schliesslich die Transmissionsamplitude

$$\sigma = \frac{(\sigma + \rho) + (\sigma - \rho)}{2} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + i\beta\mu + \frac{\beta^2}{4}(1 - e^{4i\mu})} \tag{16}$$

und den Transmissionskoeffizient

$$T = |\sigma|^2 = \frac{\mu^4}{\mu^4 + \left[\mu\beta\cos(2\mu) + \frac{\beta^2}{2}\sin(2\mu)\right]^2}. \tag{17}$$

Der Verlauf von $T(\mu)$ für $\beta = 0.6$ (gepunktet) und $\beta = 2.0$ wurde in der Abb. 1 dargestellt. Bemerkenswert ist die Existenz der Transmissionsresonanzen $T = 1$.

[1] Die Funktionen $\varphi_i(\mu)$ sind in der Streutheorie unter der Name der Jostschen-Funktionen bekannt.

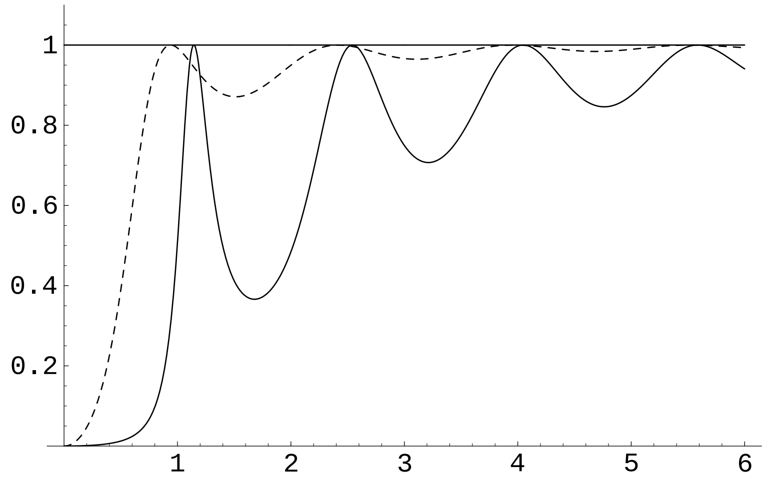

Abbildung 1: Transmissionskoeffizient $T(\mu)$.

18 Aufgabe

Die Reskalierung

$$x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X, \qquad p = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P \tag{18}$$

hat die gesuchte Eigenschaft. Die Beziehungen

$$[a, a^*] = 1, \tag{19}$$

$$H = \hbar\omega \left(a^* a + \tfrac{1}{2} \right), \tag{20}$$

$$[a, H] = \hbar\omega a \tag{21}$$

ergeben sich durch schieres Vorwärtsrechnen unter Ausnutzung des Zusammenhanges

$$[x, p] = i\hbar \tag{22}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} H(a\psi_E) = \hbar\omega(a^*a + 1/2)(a\psi_E) = \hbar\omega(aa^*a - a + a \cdot \tfrac{1}{2})(\psi_E) = \\ = a\hbar\omega(a^*a + \tfrac{1}{2} - 1)(\psi_E) = a(E - \hbar\omega)\psi_E = (E - \hbar\omega)(a\psi_E) \end{aligned} \tag{23}$$

Ebenso zeigt man

$$H(a^*\psi_E) = (E + \hbar\omega)(a^*\psi_E)$$

Weiterhin gilt für selbstadjungierte A

$$(\psi, A^2\psi) = (A\psi, A\psi) = ||A\psi||^2 \geq 0$$

Da ja H seinerseits aufgefasst werden kann als Summe der Quadrate zweier selbstadjungierter und folglich positiver Operatoren - nämlich des Ortes und des Impulses -, ist H ebenfalls positiv.

Für Eigenfunktionen ψ_E gilt insbesondere $(\psi_E, H\psi_E) = E$. Andererseits wissen wir das n-malige Anwendung von a Eigenfuktionen zum Eigenwert $E - n\hbar\omega \geq 0$ ergibt, was nur dann für alle n gelten kann, wenn sich ab einem bestimmten n identisch Null ergibt. Folglich muss eine Eigenfunktion existieren, die durch a annihiliert wird. Die explizite Ortsdarstellung dieser Funktion erhalten wir, wenn wir die eindeutig lösbare Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (x + ip) \psi = a\psi = 0 \tag{24}$$

ansetzen, deren Lösung

$$\psi = C \exp\left(-x^2\right) \tag{25}$$

lautet. Die adäquate Normierung wird durch $C = (2/\pi)^{1/4}$ erreicht.