UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
Quantenmechanik

Übungsblatt 5
Musterlösungen

13 Aufgabe

Es ist evident, dass in den Beriechen wo $V(x) = 0$ die allgemeine Lösung zu $E = -k^2$ (Wellenfunktion eines Bindungszustands) die folgende Gestalt

$$\psi(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx} \tag{1}$$

hat. Es ist auch klar, dass, wegen der Symmetrie des Potentials, wenn $\psi_E(x)$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung darstellt, so tut es auch $\psi_E(-x)$. Es sei $\psi_E(x)$ eine gegebene Lösung. Dann gilt allgemein

$$\psi_E(x) = \begin{cases} \alpha e^{kx} & x < -R \\ \beta e^{-kx} & x > R \end{cases} \tag{2}$$

wobei α, β reell gewählt werden können (und $k > 0$), da sonst würde die Lösung nicht normierbar sein. Nun es ist klar, dass $\psi_E(-x) = \alpha e^{-kx}$ (für $x > R$) keinen e^{+kx} Anteil besitzt, und deshalb muss proportional zu $\psi_E(x)$ sein. Es sei also $\psi_E(-x) = c \cdot \psi_E(x)$. Wir haben

$$\psi_E(- - x) = c\psi_E(-x) = c^2\psi_E(x), \tag{3}$$

und damit $c = \pm 1$. Es folgt jetzt sofort, dass $\alpha = \pm\beta$, d.h. $\psi_E(x)$ entweder symmetrisch oder antisymmetrisch sein muss. Diese Lösung liefert eine der beiden zu $E = -k^2$ gehörigen Lösungen der Schrödinger-Gleichung. Die übrige wächst aber wie e^{kx} für $x \to \infty$, und ist deshalb nicht normierbar ($\Leftrightarrow$ stellt keine Wellenfunktion eines Bingungszustands dar).

14 Aufgabe

Da die Berechnung der Wronski-Determinanten, $\mathcal{W}$, unkompliziert ist, zeigen wir an dieser Stelle nur welche Identität aus der x-Unabhängigkeit von welchen $\mathcal{W}$ folgt:

- $\mathcal{W}(\psi^-, \psi^+) \Rightarrow \sigma_+ = \sigma_- \overset{\text{def}}{=} \sigma$,
- $\mathcal{W}(\overline{\psi}^+, \psi^-) \Rightarrow \rho_-\overline{\sigma} + \overline{\rho}_+\sigma = 0$
- $\mathcal{W}(\overline{\psi}^+, \psi^+) \Rightarrow 1 = |\rho_+|^2 + |\sigma_+|^2$

Die Unitarität der Streumatrix $\mathbb{S}$ ist zu den beiden letzten Identitäten äquivalent. Im Falle symmetrischen Potentialen ist $\psi^+(-x)$ auch die Lösung der Schrödinger-Gleichung, die gerade die Gestalt von $\psi^-(x)$ hat, und damit muss $\rho_+ = \rho_-$.

15 Aufgabe

Wir nutzen die in der Aufgabe 6 gefundenen Transmission- und Reflexion-Amplituden:

$$\rho = \frac{i\alpha}{k - i\alpha}, \qquad \sigma = \frac{k}{k - i\alpha} \tag{4}$$

aus. Die $\mathbb{S}$-Matrix hat die Form

$$\mathbb{S} = \frac{1}{k - i\alpha} \begin{pmatrix} k & i\alpha \\ i\alpha & k \end{pmatrix} \tag{5}$$

Wir finden die Eigenwerten:

$$\lambda_1 = \frac{k + i\alpha}{k - i\alpha}, \qquad \lambda_2 = \frac{k - i\alpha}{k - i\alpha} = 1, \tag{6}$$

die zu den folgenden "Streuphasen", $\lambda = e^{2i\delta}$,

$$\cos\delta_1 = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \alpha^2}}, \qquad \sin(\delta_1) = \frac{\alpha}{\sqrt{k^2 + \alpha^2}}, \qquad \tan(\delta_1) = \frac{\alpha}{k}, \tag{7}$$

$$\delta_2 = 0, \tag{8}$$

führen. Zu diesen Phasen kann ohne Konsequenzen eine Vielfachheit der π addiert werden.