UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik

Übungsblatt 2

Musterlösungen

5 Aufgabe

In einem Hilbertraum mit dem Skalarprudukt $(\psi,\chi)=\int_0^1\overline{\psi}\,\chi$ gilt für $\hat{H}=-\frac{d^2}{dx^2}$:

$$(\psi,\hat{H}\chi)=(\hat{H}\psi,\chi)+\left[\overline{\psi}'\chi-\overline{\psi}\chi'\right]\Big|_0^1 \tag{1}$$

Falls der Randterm auf der rechten Seite für alle ψ,χ verschwindet, muss auch

$$\overline{\psi}'(0)\psi(0)-\overline{\psi}(0)\psi'(0)=\overline{\psi}'(1)\psi(1)-\overline{\psi}(1)\psi'(1), \tag{2}$$

d.h.

$$j_\psi(0)=j_\psi(1). \tag{3}$$

Es muss noch gezeigt werden, dass aus $j_\psi(0)=j_\psi(1)$ die Bedingung

$$\left[\overline{\psi}'\chi-\overline{\psi}\chi'\right]\Big|_0^1=0 \tag{4}$$

für beliebige ψ, χ (d.h. nicht nur im Fall $\psi=\chi$) folgt. Wir definieren

$$W_x(\psi,\chi)=\overline{\psi}'(x)\chi(x)-\overline{\psi}(x)\chi'(x) \tag{5}$$

und beobachten, dass diese Abbildung linear im ersten und anti-linear im zweiten Argument ist, insbesondere

$$W_x(\psi,i\chi)=iW_x(\psi,\chi) \tag{6}$$

$$W_x(i\psi,\chi)=-iW_x(\psi,\chi) \tag{7}$$

Per Annahme

$$W_0(\varphi,\varphi)=W_1(\varphi,\varphi). \tag{8}$$

Nun diese Bedingung, entwickelt für $\varphi=\psi+\chi$ und $\tilde{\varphi}=\psi+i\chi$ führt unmittelbar auf

$$W_0(\psi,\chi)=W_1(\psi,\chi), \tag{9}$$

was zu (4) äquivalent ist.

6 Aufgabe

Wegen des Produktes $V(x)\psi(x)$ in der Schrödinger-Gleichung muss die Stetigkeit von $\psi(x)$ vorausgesetzt werden. Nach der Integration von $x = -\epsilon$ zu $x = \epsilon$ erhalten wir im Limit $\epsilon \to 0$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi'\right]_{-\epsilon}^{\epsilon} - g\psi(0)\right\} = 0, \tag{10}$$

d.h. die gesuchte Bedingung am $x = 0$.
Bindungszustände: in den Bereichen $x > 0$ und $x < 0$ gilt die freie Schrödinger-Gleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = -k^2\psi, \qquad E = -k^2 < 0 \tag{11}$$

die die folgende allgemeine Lösung besitzt:

$$\psi = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}, \qquad \alpha = +\sqrt{\frac{2mk^2}{\hbar^2}}. \tag{12}$$

Für $x < 0$ ist $e^{-\alpha x}$ nicht normierbar (d.h. $\int_{-\infty}^{0} |\exp(-\alpha x)|^2\, dx = \infty$), während für $x > 0$ passiert das Gleiche für $e^{\alpha x}$. Eine Lösung der Schrödinger-Gleichung zur Energie $E < 0$ ist also normierbar, wenn sie für $x < 0$ gleich $A'e^{\alpha x}$ und für $x > 0$ gleich $B'e^{-\alpha x}$ ist. Wegen der notwendigen Stetigkeit am $x = 0$ muss $B' = A'$ sein. Wir haben damit

$$\psi = N\, e^{-\alpha|x|}. \tag{13}$$

Aus der Bedingung (10) folgt jetzt:

$$\alpha = \frac{gm}{\hbar^2}, \qquad k^2 = \frac{mg^2}{2\hbar^2} = -E. \tag{14}$$

Zu beachten ist, dass die Parameter m und g legen die Energie fest, d.h. *es existiert nur ein negativer Wert der Energie*, der einem Bindungszustand entspricht, bei dem die Schrödinger-Gleichung eine normierbare Lösung besitzt. Die Normierungskonstante wird aus

$$1 = N^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-2\alpha|x|} \tag{15}$$

bestimmt:

$$N = \sqrt{\alpha}. \tag{16}$$

Streuzustände: Wir nehmen an: $E = k^2$, sodass die allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung, in den Bereichen wo $V(x) = 0$ die Gestalt

$$\psi = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}, \qquad \alpha = +\sqrt{\frac{2mk^2}{\hbar^2}} \tag{17}$$

hat, und hat die Interpretation einer Superposition der Bewegung in der positiven Richtung (A) und der Bewegung in der negativen Richtung (B). Wir nehmen an, dass $A = 1$, d.h. dass der aus $x = -\infty$ einlaufende Teilchenstrom die Amplitude 1 besitzt[1]. Um die Lösung eindeutig zu spezifizieren muss noch entweder: der Wert von B gegeben werden, oder die Annahme, dass es keinen aus der $x = +\infty$ herkommenden Teilchenstrom gibt gemacht werden. Wir wählen die zweite Bedingung, obwohl die erste vielleicht mathematisch einfacher erscheint, den sie uns eine einfache physikalische Interpretation zulässt. Unsere Lösung hat daher die Form

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{i\alpha x} + Re^{-i\alpha x}, & \text{für } x < 0, \\ Te^{i\alpha x}, & \text{für } x > 0. \end{cases} \tag{18}$$

wobei R und T komplexe Zahlen sind, und die Interpretation des Reflexions- und Transmission-Koeffizienten besitzen. Aus der Stetigkeitsbedingung,

$$1 + R = T, \tag{19}$$

und aus der Bedingung (10), die zu

$$i\alpha(1 - R) - i\alpha T = \frac{2mg}{\hbar^2} T \tag{20}$$

äquivalent ist, folgt jetzt

$$T = \frac{1}{1 - i\beta}, \qquad R = \frac{i\beta}{1 - i\beta}, \tag{21}$$

wobei

$$\beta = \frac{mg}{\alpha \hbar^2}. \tag{22}$$

Zu beachten ist, dass $|R|^2 + |T|^2 = 1$ wie es sein soll, den die Teilchen dürfen nicht verschwinden.

[1] Diesem Strom enstspricht die Wahrscheinlichkeitsstrom $j = \alpha\hbar/m$.