UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
Quantenmechanik

Übungsblatt 11
Musterlösungen

33 Aufgabe

Die erste Identität ergibt sich durch eine einfache Matrixmultiplikation. Zur Berechnung von $\exp(i\alpha\vec{n}\vec{\sigma})$ man beachte, dass $\sigma_i^2 = \mathbf{1}$ und $(n_i\sigma^i)(n_j\sigma^j) = i\epsilon_{ijk}n^in^j\sigma^k + |\vec{n}|^2 \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$. Zusätzlich ist die Exponente im Sinne der Taylor-Reihe zu verstehen:

$$\exp(i\alpha\vec{n}\vec{\sigma}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\alpha\vec{n}\vec{\sigma})^k}{k!}. \tag{1}$$

Für gerade k's die Summanden sind durch die Einheitsmatrix multiplizierd, während für ungerade k's lässt sich $i\alpha\vec{n}\vec{\sigma}$ ausklammern (und das Übrige wird wieder durch die Einheitsmatrix multipliziert), so dass die Behauptung folgt unmittelbar.

34 Aufgabe

Sei $\psi_0 = \psi(0)$. Wegen

$$\exp(iH_0t) = \exp\left(i\frac{Et}{2}\sigma_3\right) = \begin{pmatrix} e^{iEt/2} & 0 \\ 0 & e^{-iEt/2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

findet man durch einfaches Vorwartsrechnen

$$V_I(t) = \exp(iH_0t)\,V(t)\,\exp(-iH_0t) = D\,\sigma_1 \tag{3}$$

wobei, es ist zu bemerken, dass V_I glücklicherweise zeit-unabhängig ist. Damit ist die Wechselwirkungsbild-Schrödingergleichung

$$i\frac{d\psi_I}{dt} = V_I\psi_I \tag{4}$$

trivial lösbar:

$$\psi_I(t) = e^{-iD\sigma_1 t}\psi_0 = [\cos(Dt)\,\mathbf{1} - i\sigma_1\sin(Dt)] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(Dt) \\ -i\sin(Dt) \end{pmatrix} \tag{5}$$

und wegen

$$\psi(t) = e^{-iH_0t}\psi_I(t) \tag{6}$$

gilt

$$\psi(t) = e^{-iH_0 t} e^{-iD\sigma_1 t}\psi_0 = \begin{pmatrix} e^{iEt/2}\cos(Dt) \\ -ie^{-iEt/2}\sin(Dt) \end{pmatrix} \tag{7}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür das System zur Zeit t wieder im Zustand ψ_0 zu finden ist

$$|\,(\psi_0, \psi(t))\,|^2 = |(\psi_0, \exp(-i\sigma_1 Dt)\psi_0)|^2 = \cos^2(Dt).$$

Die Anregungswahrscheinlichkeit oszilliert damit in der Zeit mit einer von D abhängigen Frequenz. Diese Oszillationen sind als Rabi-Oszillationen bekannt.

35 Aufgabe

Wie in der Aufgabe 34 findet man

$$V_I = f(t)\sigma_1 \tag{8}$$

Der (Wechselwirkungsbild-) Zustandsvektor kann jetzt durch

$$\psi_I = a(t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{9}$$

parametrisiert werden. Die Wechselwirkungsbild-Schrödingergleichung lautet

$$i\frac{da}{dt}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + i\frac{db}{dt}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = f(t)\sigma_1\psi_I = f(t)\,b(t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + f(t)\,a(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{10}$$

sodass die Funktionen $a(t)$ und $b(t)$ erfüllen die Gleichungen

$$i\dot{a} = f(t)b \tag{11}$$

$$i\dot{b} = f(t)a. \tag{12}$$

die auf

$$\frac{1}{f}\frac{d}{dt}\frac{1}{f}\frac{da}{dt} = -a \tag{13}$$

führen. Diese Gleichung lässt sich durch die Substitution $dx = f dt$, d.h.

$$x = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds, \tag{14}$$

einfach lösen. Es gibt zwei Lösungen für $a(t)$ die wir mit $a_1(t)$ und $a_2(t)$ bezeichnen. Zu jeder solchen Lösung gehört ein $b_i(t) = i\frac{1}{f}\,\frac{da_i}{dt} \; = i\frac{da_i}{dx}$. Die Differentialgleichungen waren homogen, aber die Lösungen müssen noch normiert werden, sodass $|a(t)|^2 + |b(t)|^2 = 1$. Schliesslich erhalten wir

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(+ix), \qquad b_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(ix), \tag{15}$$

und

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-ix), \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-ix). \tag{16}$$

Wir sehen, dass die Wechselwirkungsbild-Schrödingergleichung hat zwei Stationäre Lösungen:

$$\psi_1(t) = \frac{e^{ix}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

und

$$\psi_2(t) = \frac{e^{-ix}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

wobei $x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds$. Zu $t = t_0$ ist $x = 0$ sodass

$$\psi_1(t_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

und

$$\psi_2(t_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Die Zeitentwicklung eines zu $t = t_0$ gegebenen, beliebigen Vektors χ_I wird bestimmt in dem man den Vektor als Linearkombination von ψ_1 und ψ_2 zerlegt:

$$\chi_I = \alpha\psi_1(t_0) + \beta\psi_2(t_0), \tag{21}$$

und dann automatisch

$$\chi_I(t) = \alpha\psi_1(t) + \beta\psi_2(t). \tag{22}$$