UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik

Übungsblatt 10

Musterlösungen

30 Aufgabe

Per Annahme sind die Vektoren ψ_m normiert (wir vernachlässigen den ersten trivialen Index). Nun es ist klar, dass $J_+\psi_m$ proportional zu ψ_{jm+1} sein soll (es muss ein Eigenvektor von J_3 zum Eigenwert $m+1$ sein),

$$J_+\psi_m = N\psi_{m+1} \tag{1}$$

Wegen

$$N^2 = (J_+\psi_m, J_+\psi_m) = (\psi_m, J_-J_+\psi_m) = \big(\psi_m, (J^2 - J_3(J_3+1))\psi_m\big) = j(j+1) - m(m+1) \tag{2}$$

d.h.

$$J_+\psi_m = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,\psi_{m+1} \tag{3}$$

und analog

$$J_-\psi_m = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,\psi_{m-1}. \tag{4}$$

Es folgt nun, dass

$$J_+\psi_{n-j} = \sqrt{(n+1)(2j-n)}\,\psi_{n+1-j} \tag{5}$$

Wir betrachten jetzt

$$(J_+)^k\psi_{-j} = \alpha\psi_{-j+k}, \tag{6}$$

wobei

$$\alpha^2 = 1(2j-0)\cdot 2(2j-1)\cdot 3(2j-2)\cdot \ldots k(2j-k+1) = \frac{k!\,(2j)!}{(2j-k)!} \tag{7}$$

Wir erhalten also

$$\psi_{k-j} = \sqrt{\frac{(2j-k)!}{(2j)!\,k!}}\,(J_+)^k\psi_{-j} \tag{8}$$

31 Aufgabe

Im Fall von gilt

$$J_3\psi_m = m\psi_m. \tag{9}$$

Die entsprechende Matrix wird also diagonal. Die einzige nicht-verschwindende Elemente sind

$$(\psi_2, J_3\psi_2) = 2, \qquad (\psi_1, J_3\psi_1) = 1. \tag{10}$$

Im Fall von J_1 berechnen wir zunächst die Matrixelemente von $J_\pm$ und dann verwenden die Identität

$$J_1 = \frac{1}{2}\,(J_+ + J_-). \tag{11}$$

Unter Verwendung von (3) finden wir die nicht-verschwindende Elemente:

$$(\psi_1, J_+\psi_0) = \sqrt{6}, \qquad (\psi_2, J_+\psi_1) = 2, \tag{12}$$

und aus (4) folgt

$$(\psi_0, J_-\psi_1) = \sqrt{6}, \qquad (\psi_1, J_-\psi_2) = 2. \tag{13}$$

Schliesslich gilt

$$(\psi_1, J_1\psi_0) = \sqrt{3/2}, \qquad (\psi_0, J_1\psi_1) = \sqrt{3/2}, \tag{14}$$

$$(\psi_2, J_1\psi_1) = 1, \qquad (\psi_1, J_1\psi_2) = 1. \tag{15}$$

$$\tag{16}$$

32 Aufgabe

In der Berechnung der Matrix-Elementen sind die $r-$ und Winkel-Integrationen unabhängig. Unter Verwendung der in der Aufgabe gegebenen Formeln finden wir

$$\int r^2 dr\, R_{10}\, r\, R_{21} = \frac{a}{\sqrt{6}} \int_0^\infty x^4 e^{-\frac{3}{2}x} = \frac{a}{\sqrt{6}} \cdot \frac{256}{81}. \tag{17}$$

Wir bemerken schon an dieser Stelle, dass die Berechnung der Matrixelemente von $\vec{p}$ wegen der Kugelsymmetrie einer der Zustände ($\psi = R_{10}Y_{00}$) sehr ähnlich erfolgt. Es gilt nämlich

$$(\psi, \vec{p}\chi) = (\vec{p}\psi, \chi), \tag{18}$$

und wegen $\partial_i r = x_i/r$ gilt

$$(\vec{p}\psi, \chi) = -i\left(\frac{1}{r}\frac{\partial R_{10}}{\partial r} Y_{00}, \vec{x}\,\chi\right). \tag{19}$$

Nur die $r-$Integration wird also beeinflusst.

Wir gehen jetzt über zu den Winkel-Integralen. Wie in der Aufgabe 29 viele von diesen verschwinden in der φ-Integration. Die übliche θ-Integration ist auch einfach:

$$\int d\theta \sin^3\theta = \frac{4}{3}\,, \qquad \int d\theta \sin\theta\, \cos^2\theta = \frac{2}{3}. \tag{20}$$

Wir finden

$$(Y_{00}, x\,Y_{11}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,, \qquad (Y_{00}, x\,Y_{10}) = 0, \tag{21}$$

$$(Y_{00}, y\,Y_{11}) = -\frac{i}{\sqrt{3}}\,, \qquad (Y_{00}, y\,Y_{10}) = 0, \tag{22}$$

$$(Y_{00}, z\,Y_{11}) = 0\,, \qquad (Y_{00}, z\,Y_{10}) = \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{23}$$