UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
Quantenmechanik

Übungsblatt 1
Musterlösungen

2 Aufgabe

Aus der Definition eines kanonisch-koniugierten Impulses,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} \tag{1}$$

finden wir

$$p_x = 2f\dot{x}, \qquad p_y = 2\dot{y}/f, \tag{2}$$

wobei wegen der x-Unabhängigkeit der Lagrangefunktion wird p_x während der Bewegung erhalten. Die Gestalt der Energie wird am einfachsten gefunden in dem die Hamiltonfunktion durch Koordinaten und *Geschwindigkeiten* ausgedrückt wird:

$$E = H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L = f\dot{x}^2 - \frac{\dot{y}^2}{f} = L. \tag{3}$$

Die Hamiltonfunktion, anderseits, hängt nur von den Koordinaten und Impulse ab:

$$H = \frac{p_x^2}{4f} - \frac{f\,p_y^2}{4}. \tag{4}$$

Wir beobachten nun, dass die Energie eine homogene Funktion der Grad -2 der Zeit ist, d.h. sie skaliert als $E \to \lambda^{-2}E$ bei $t \to \lambda t$. Es folgt, dass entweder kann E auf ± 1 durch Reskalierung der Zeit gebracht werden, oder ist sie gleich Null. In allen Fälle es existieren genügend viele (zwei) Erhaltungsgrößen um die Bewegungsgleichungen geschlossen zu integrieren. Sei

$$p_x = 2K = const. \tag{5}$$

Wir finden

$$Ef = K^2 - \dot{y}^2. \tag{6}$$

Im Fall $E = 0$ finden wir[1]

$$\dot{y} = \pm K, \tag{7}$$

[1] Allgemeine Lösung befindet sich, z.B. im Buch von S. Chandrasekhar “The Mathematical Theory of Black Holes”, S. 98 (§19a).

also

$$y = y_0 \pm Kt, \tag{8}$$

und

$$dx = \frac{K\,dt}{1 - \frac{1}{y(t)}} \tag{9}$$

d.h.

$$x = x_0 + Kt \pm \ln(y_0 - 1 \pm Kt). \tag{10}$$

Wir bemerken, dass aus (**??**) folgt auch eine einfache Gleichung für $x(y)$:

$$dx = \pm \frac{dy}{1 - 1/y}, \tag{11}$$

mit der Lösung

$$x = x_0 \pm [y + \ln(y - 1)]. \tag{12}$$

3 Aufgabe

Für die angegebene Lagrangefunktion ergeben sich aus

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0 \tag{13}$$

die folgenden Bewegungsgleichungen (Euler-Lagrange-Gleichungen):

$$m\ddot{x} = -\lambda \dot{y} \tag{14}$$

$$m\ddot{y} = \lambda \dot{x}. \tag{15}$$

Aus der Definition eines kanonisch-koniugierten Impulses,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} \tag{16}$$

finden wir

$$p_x = m\dot{x} + \lambda y, \qquad p_y = m\dot{y} - \lambda x. \tag{17}$$

Die Energie ist

$$E = H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \tag{18}$$

Die Erhaltung des Drehimpulses und seine Form folgt am einfachsten in Polarkoordinaten,

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \tag{19}$$

so, dass die Lagrangefunktion in (r, φ) Koordinaten

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \lambda r^2 \dot{\varphi}, \tag{20}$$

explizit $\varphi-$unabhängig ist. Der (erhaltene) Drehimpuls ist nun der zu φ konjugierte Impuls:

$$J = p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = mr^2\dot{\varphi} - \lambda r^2.$$

Die Hamiltonfunktion wird gefunden wenn die Geschwindigkeiten in der Energie durch Impulse ersetzt werden:

$$H = \frac{1}{2m}\left[(p_x - \lambda y)^2 + (p_y + \lambda x)^2\right]. \tag{21}$$

Letztlich können die Hamilton-Gleichungen gestellt werden; allgemein:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \tag{22}$$

und im unseren Fall:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p_x - \lambda y}{m}, \qquad & \dot{p}_x &= -\lambda\,\frac{p_y + \lambda x}{m}, \\ \dot{y} &= \frac{p_y + \lambda x}{m}, \qquad & \dot{p}_y &= \lambda\,\frac{p_x - \lambda x}{m}. \end{aligned}$$