UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik II

Übungsblatt 8

Solutions

22. Die normierten Versionen der Versuchsfunktionen sind

$$\psi_a(x) = (a/\pi)^{1/4} e^{-ax^2/2},$$
$$\chi_a(x) = (2a^3/\pi)^{1/2} \frac{1}{a^2 + x^2}.$$

Mit deren Hilfe können wir die Erwartungswert der kinetischen Energie, $T = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2$ sofort berechnen:

$$\langle T \rangle_{\psi_a} = \tfrac{\hbar^2}{2m} \frac{a}{2},$$
$$\langle T \rangle_{\chi_a} = \tfrac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{2a^2}.$$

Für das harmonischen Potential, und die χ Funktion findet man die Gesamtenergie:

$$E = \frac{m\omega^2}{2} a^2 + \frac{1}{2a^2} \frac{\hbar^2}{2m}$$

die ein Minimum bei $a^2 = \hbar/\sqrt{2}m\omega$ hat. Am Minimum ist

$$E_{min} = \hbar\omega(1/2\sqrt{2} + 1/4) \approx \hbar\omega \cdot 0.6$$

was natürlich eine obere Schranke für die Grundzustandsenergie $E_0 = \hbar\omega \cdot 0.5$ liefert. Für die ψ Funktion ist die Abschätzung offensichtlich besser, da die Versuchsfunktion gerade die Form der Grundzustandswellenfunktion hat. Wir finden

$$E = \frac{m\omega^2}{4a} + \frac{a}{2} \frac{\hbar^2}{2m}$$

$$a_{min} = m\omega/\hbar$$

$$E_{min} = \tfrac{1}{2}\hbar\omega = E_0.$$

Nun für das Deltapotential ist keine von den Versuchsfunktionen in der Form des Grundzustandswellenfunktion. Für die ψ Funktion ergibt sich

$$E = -g(a/\pi)^{1/2} + \frac{a}{2} \frac{\hbar^2}{2m}$$

$$a_{min} = \left(\frac{2mg}{\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{\pi}$$

$$E_{min} = -\frac{mg^2}{\hbar^2}\frac{1}{\pi} > E_0 = -\frac{mg^2}{2\hbar^2}.$$

Im Fall der χ Funktion finden wir

$$E = -g\frac{2}{\pi a} + \frac{1}{2a^2}\frac{\hbar^2}{2m}$$

$$a_{min} = \frac{\pi\hbar^2}{4mg}$$

$$E_{min} = -\frac{mg^2}{2\hbar^2}\frac{8}{\pi^2} > E_0.$$

23. Zunächst formen wir das Problem so um, dass nur dimensionslosen Gößen auftreten. Aus

$$E\psi = -\frac{\hbar^2\psi''}{2m} + mgz\psi$$

folgt

$$\mathcal{E}\psi = -\psi'' + x\psi,$$

wenn $x = bz$, mit $b^3 = 2m^2g/\hbar^2$. Es gilt auch

$$\mathcal{E} = E/a, \qquad \text{mit } a = \frac{\hbar^2 b^2}{2m}.$$

Das Problem soll offensichtlich für $x > 0$ betrachtet werden. Wir wählen die (normierten) Versuchsfunktionen

$$\psi_a = 2a^{3/2}xe^{-ax}.$$

Als Mittelwert der kinetischen Energie erhalten wir

$$\langle -\partial_x^2 \rangle = a^2$$

und für die Gesamtenergie

$$E_\psi = \frac{3}{2a} + a^2$$

d.h.

$$a_{min} = (3/4)^{1/3}$$

und

$$E_{min} = 2.47\ldots$$

Man beachte noch das Folgende: die dimensionslose Gleichung kann als

$$\psi'' = (x - \mathcal{E})\psi$$

betrachtet werden. Nun für $y = x - \mathcal{E}$ ist das gerade die Airy-Gleichung:

$$\partial_y^2 \psi = y\psi$$

Die Airy-Gleichung besitzt zwei unabhängige Lösungen, $Ai(x)$ und $Bi(x)$; $Bi(x)$ wächst schnell für $y \to \infty$, was natürlich diese Lösung ausschließt. Nun die $Ai(x)$ hat die erste Nullstelle bei $y = -2.3381$, d.h. $\psi(x) = Ai(y + \mathcal{E})$ verschwindet bei $x = 0$ (erfüllt die Randbedingung) erst wenn $\mathcal{E} = 2.3381$. Auf diese Weise haben wir die exakte Grundzustandsenergie ermittelt. Die Variationsmethode bietet offensichtlich eine gute Abschätzung dieser Energie.