UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik II

Übungsblatt 7

Solutions

20. Wir führen die Bezeichnung

$$(J_-)^n|jj\rangle = c_n|j,j-n\rangle$$

ein, und finden rekursiv, wegen $J_-|jm\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}|j,m-1\rangle$,

$$c_n = \sqrt{\frac{(2j)!n!}{(2j-n)!}}.$$

Es gilt auch

$$c_{n+1} = c_n\sqrt{(n+1)(2j-n)}.$$

Der Fall $j = l + 1/2$. Trivialerweise gilt

$$|jj\rangle = |l\rangle \otimes |+\rangle,$$

wobei $|l\rangle$ ist ein Eigenzustand von L zum Eigenwert l, und $|+\rangle$ ist der Eigenzustand von S zum Eigenwert $+1/2$. Nun wenden wir J_- sukzessiv auf $|jj\rangle$ und erhalten

$$c_n|j,j-n\rangle = d_n|l-n\rangle \otimes |+\rangle + nd_{n-1}|l-n+1\rangle \otimes |-\rangle,$$

wobei d_n ist der Analog von c_n für den Bahndrehimpuls. Einfache Schritte führen letzt endlich auf

$$|j,j-n\rangle = \sqrt{\frac{2l+1-n}{2l+1}}|l-n\rangle \otimes |+\rangle + \sqrt{\frac{n}{2l+1}}|l-n+1\rangle \otimes |-\rangle.$$

Diese Zustände sind normiert wie man leicht zieht.

Der Fall $j' = l - 1/2$. Es muss gelten

$$|j'j'\rangle = \alpha|l-1\rangle \otimes |+\rangle + \beta|l\rangle \otimes |-\rangle,$$

wobei wir Annehmen, dass α reell und positiv ist. J_+ vernichtet $|j'j'\rangle$ und es folgt

$$|j'j'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\left[\frac{d_1}{\sqrt{2l}}|l-1\rangle \otimes |+\rangle - \sqrt{2l}|l\rangle \otimes |-\rangle\right],$$

wobei $d_1 = \sqrt{2l}$. Nun man sieht leicht, dass durch die sukkzessive Anwendung von J_- eine kompakte Formel hergeleitet werden kann:

$$c_n|j',j'-n\rangle = \frac{d_{n+1}}{c_n\sqrt{2l(2l+1)}}|l-n-1\rangle\otimes|+\rangle + \left[\frac{n-2l}{\sqrt{2l(2l+1)}}\right]\frac{d_n}{c_n}|l-n\rangle\otimes|-\rangle,$$

und damit

$$|j',j'-n\rangle = \sqrt{\frac{n+1}{2l+1}}|l-n-1\rangle\otimes|+\rangle - \sqrt{\frac{2l-n}{2l+1}}|l-n\rangle\otimes|-\rangle.$$

Speziallfall $l = 1$. Die Anwendung der obiegen Formel im Speziallfall $l = 1$ führt zu

$$\begin{aligned}
|j,\tfrac{3}{2}\rangle &= |1\rangle\otimes|+\rangle,\\
|j,\tfrac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}|0\rangle\otimes|+\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}|1\rangle\otimes|-\rangle,\\
|j,-\tfrac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\tfrac{1}{3}}|-1\rangle\otimes|+\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}|0\rangle\otimes|-\rangle,\\
|j,-\tfrac{3}{2}\rangle &= |-1\rangle\otimes|-\rangle,
\end{aligned}$$

mit $j = 1 + 1/2$, und

$$\begin{aligned}
|j',\tfrac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\tfrac{1}{3}}|0\rangle\otimes|+\rangle - \sqrt{\tfrac{2}{3}}|1\rangle\otimes|-\rangle,\\
|j',-\tfrac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}|-1\rangle\otimes|+\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{3}}|0\rangle\otimes|-\rangle,
\end{aligned}$$

für $j' = 1 - 1/2$.

21. **Spin-Bahn Kopplung und Wechselwirkung mit einem Magnetfeld**
Wegen $2L\cdot S = J^2 - L^2 - S^2$ können die Matrixelemente des H_{LS} in der Gesamtdrehimpuls-Basis sofort abgelesen werden: in dem Unterraum zu $j = \frac{3}{2}$ ist $2L\cdot S = 1$, und in dem zu $j' = \frac{1}{2}$ gilt $2L\cdot S = -2$. Nun die Matrixelemente des $M = L_z + 2S_z$ sind leicht zu berechnen aus

$$\begin{aligned}
M|j,\tfrac{3}{2}\rangle &= 2|1\rangle\otimes|+\rangle,\\
M|j,\tfrac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}|0\rangle\otimes|+\rangle,\\
M|j,-\tfrac{1}{2}\rangle &= -\sqrt{\tfrac{2}{3}}|0\rangle\otimes|-\rangle,\\
M|j,-\tfrac{3}{2}\rangle &= -2|-1\rangle\otimes|-\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M|j',\tfrac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\tfrac{1}{3}}|0\rangle\otimes|+\rangle,\\
M|j',-\tfrac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\tfrac{1}{3}}|0\rangle\otimes|-\rangle,
\end{aligned}$$

Die Vektoren $|1\rangle\otimes|+\rangle$ und $|-1\rangle\otimes|-\rangle$ bereits Eigenvektoren von H sind; um das Problem zu lösen mussen noch die weitere vier Eigenvektoren bestimmt werden. Wir schränken uns also zu dem von diesen Vektoren gespannten Raum (d.h. zu dem Hilbertraum ohne den schon gefundenen Eigenvektoren von H).

Wenn wir die Basisvektoren dieses Raumes durch

$$\begin{aligned} e_1 &= |0\rangle \otimes |+\rangle \\ e_2 &= |0\rangle \otimes |-\rangle \\ e_3 &= |1\rangle \otimes |-\rangle \\ e_4 &= |-1\rangle \otimes |+\rangle \end{aligned}$$

bezeichnen, dann für $M = L_z + 2S_z$ gilt

$$\begin{aligned} Me_1 &= e_1 \\ Me_2 &= -e_2 \\ Me_3 &= 0 \\ Me_4 &= 0, \end{aligned}$$

d.h. die Basisvektoren bereits Eigenvektoren von H_M sind. Ferner, wegen $2L \cdot S = 2L_zS_z + L_+S_- + L_-S_+$ gilt

$$H_{LS} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der volle Hamiltonoperator ist damit gleich

$$H_{LS} = \alpha \begin{pmatrix} \beta & 0 & \sqrt{2}\alpha & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & \sqrt{2}\alpha \\ \sqrt{2}\alpha & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\alpha & 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Das Spectrum von H besteht aus der Eigenwerten dieser Matrix. Glücklicherweise ist die Eigenwertgleichung bi-quadratisch:

$$\left[(\lambda - \beta)(\lambda + \alpha) - 2\alpha^2\right] \left[(\lambda + \beta)(\lambda + \alpha) - 2\alpha^2)\right] = 0$$

und damit erhalten wir vier, in Allgemein verschiedene, Eigenwerte:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-\beta - \alpha - \sqrt{9\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}\right)$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-\beta - \alpha + \sqrt{9\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}\right)$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\left(\beta - \alpha - \sqrt{9\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}\right)$$
$$\lambda_4 = \frac{1}{2}\left(\beta - \alpha + \sqrt{9\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}\right).$$

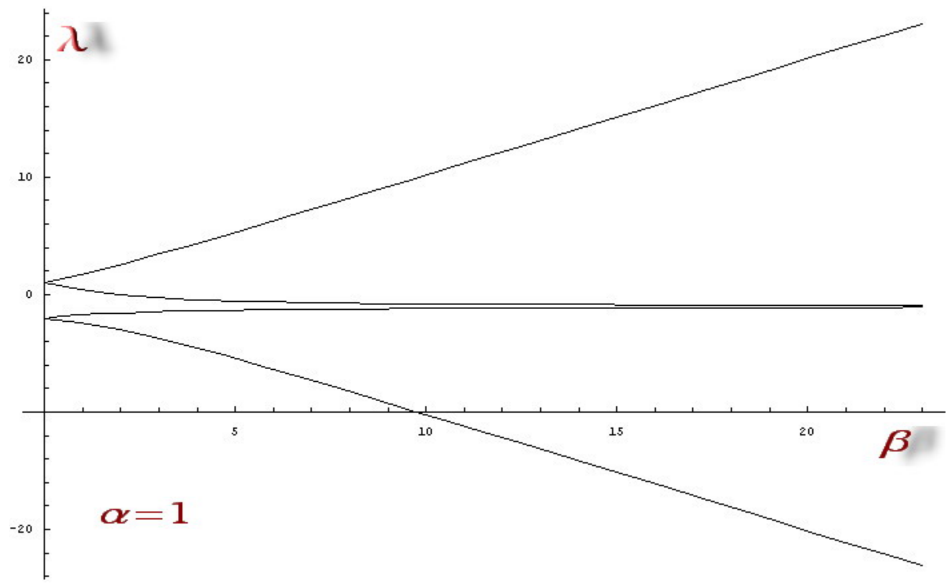

Abbildung 1: Das Spektrum von H für $\alpha = 1$ als Funktion von β (von der Magnetfeld-Stärke). Zu beachten ist, dass die Eigenwerte für $\beta = 0$ zweimal entartet sind, und dass die Entartung wird durch das Magnetfeld aufgehoben (Zeeman-Effekt). Für $\beta \to \infty$ ist nur der asymtotische Eigenwert $\lambda_{2/3} = -a$ zweimal entartet. Nicht gezeigt sind die beiden trivialen Zustände: $|1\rangle \otimes |+\rangle$ und $|-1\rangle \otimes |-\rangle$ mit Energien $\pm(\alpha + 2\beta)$.

Denensprechende unnormierten Eigenvektoren sind:

$$w_1 = \left(0, \frac{\alpha - \beta - \sqrt{9\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}}{2\alpha\sqrt{2}}, 0, 1\right)$$
$$w_2 = \left(0, \frac{\alpha - \beta + \sqrt{9\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}}{2\alpha\sqrt{2}}, 0, 1\right)$$
$$w_3 = \left(\frac{\alpha + \beta - \sqrt{9\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}}{2\alpha\sqrt{2}}, 0, 1, 0\right)$$
$$w_4 = \left(\frac{\alpha + \beta + \sqrt{9\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}}{2\alpha\sqrt{2}}, 0, 1, 0\right).$$

Im Grenzfall $\beta \to \infty$ (Paschen-Back-Effekt) gilt:

$$w_1 \to e_2 \text{ mit } \lambda_1 \to -\beta$$
$$w_2 \to e_4 \text{ mit } \lambda_2 \to -\alpha$$
$$w_3 \to e_3 \text{ mit } \lambda_3 \to -\alpha$$
$$w_4 \to e_1 \text{ mit } \lambda_4 \to \beta.$$

Obwohl die Grenzwerte für λ_1 und λ_4 könnten wir erwarten (H_{LS} ist eine infinitesimale Korrektur zu H_M), für λ_2 und λ_3 gibt es von β unabhängige Gränzwerten weil die ensprechende Vektoren Eigenvektoren von H_M zu dem Eigenwert Null sind.

Im Grenzfall $\beta \to 0$ (Zeeman-Effekt) ist es sinnvoll zu der Gesamtdrehimpuls-Basiz zu übergehen. Für $\beta = 0$ hat der Hamiltonoperator nur zwei Eigenwerte: $+\alpha$ und -2α; die erste ist viermal und die zweite zweimal entartet. Der Eigenraum zu $+\alpha$ stimmt mit dem Raum zu $j = 1 + 1/2$ überein. Wie wir schon am Anfang der Musterlösung dieser Aufgabe gesehen haben, ist der Operator H_M (betrachtet jetzt als Störung), wenn eingeschränkt zu diesem Raum bereits diagonal, $H_M = \beta{\cdot}\text{diag}(2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -2)$, d.h. die Werte auf der Diagonale liefern die Korrekturen zu den Energien der Zustände; die Entartung wird vollig aufgehoben. Das Gleiche passiert in dem Raum zu $j' = 1 - 1/2$, wo $H_M = \beta{\cdot}\text{diag}(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. In anderen Worten:

$$E_{|j,\frac{3}{2}\rangle} = \alpha + 2\beta$$
$$E_{|j,\frac{1}{2}\rangle} = \alpha + \tfrac{2}{3}\beta$$
$$E_{|j,-\frac{1}{2}\rangle} = \alpha - \tfrac{2}{3}\beta$$
$$E_{|j,-\frac{3}{2}\rangle} = \alpha - 2\beta$$
$$E_{|j',\frac{1}{2}\rangle} = -2\alpha + \tfrac{1}{3}\beta$$
$$E_{|j',-\frac{1}{2}\rangle} = -2\alpha - \tfrac{1}{3}\beta.$$