UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik II

Übungsblatt 6

Solutions

Zunächst lohnt es sich dimensionslose Koordinaten einzuführen. Mit $\omega_c = \frac{eH}{mc}$ (Zyklotronfrequenz) und $a_0 = \sqrt{\frac{\hbar c}{eH}}$ (magnetische Länge)[1] sind die Koordinaten

$$\tilde{x}^i = x^i/a_0$$

dimensionslos (wir schreiben weiter x^i anstelle von $\tilde{x}$). Nun kann H in Einheiten von $\hbar\omega_c$ ausgedrückt werden: für $\vec{A} = (0, B \cdot x, 0)$ finden wir

$$H = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(-i\partial_y - x)^2,$$

und

$$H = \frac{1}{2}\left[\left(-i\partial_x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(-i\partial_y - \frac{x}{2}\right)^2\right],$$

für $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$.

18. **Landau Problem;** $\vec{A} = (0, B \cdot x, 0)$
    In unseren Koordinaten ist der Ansatz:

    $$\psi = e^{iky} f(x),$$

    was zu

    $$Hf = -f''/2 + \frac{1}{2}(x_0 - x)^2 f = Ef$$

    führt mit $x_0 = k$. Offensichtlich ist also unseres System (in der x-Richtung) equivalent zu einem um x_0 verchobenen harmonischen Oszillator. Wir finden

    $$E_n = n + 1/2$$

    und

    $$f_n(x) = \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} f_0(x)$$

    mit $a^* = (x - \partial_x)/\sqrt{2}$ wobei

    $$f_0(x) = \pi^{-1/4} e^{-(x-x_0)^2/2}.$$

[1] Für B =1T= $3 \cdot 10^4 \frac{ecu}{cm^2}$ ist $a_0 \approx 1.4 \cdot 10^{-6}$cm; für Elektronen in GaAs ($m^* = 0.07 m_e$) bei B =1T finden wir $\omega_c \approx 7 \cdot 10^{14}$Hz.

Das Teilchen ist also lokalisiert um $x = x_0$ und homogen in der y-Richtung. Der elektrische Strom in dieser Richtung

$$j_y = \frac{e}{2}[\overline{\psi}(-i\partial_y - x)\psi - \overline{(-i\partial_y - x)\psi}\psi] = e(x_0 - x)|f_n(x)|^2.$$

ist positiv für $x < x_0$ und negativ für $x > x_0$. (In der x-Richtung der Ström verschwindet.)

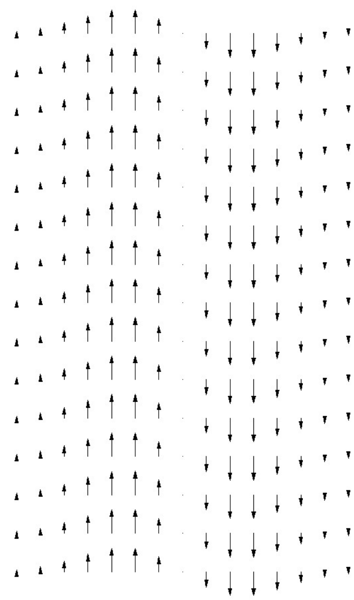

Abb. 1. Quantenmechanische Ströme im homogenen magnetischen Feld.

19. **Landau Problem für $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$**
Mit einer zusätzlichen Skalierung $x \to \sqrt{2}x$, $y \to \sqrt{2}y$ ergibt sich

$$H = \frac{1}{4}\left[(-i\partial_x + y)^2 + (-i\partial_y - x)^2\right].$$

Nun führen wir $z = x + iy$, und

$$\partial = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$$
$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

sodass die Operatoren

$$a = -\overline{\partial} - z/2 \qquad\qquad b = \partial + \overline{z}/2$$
$$a^* = \partial - \overline{z}/2 \qquad\qquad b^* = -\overline{\partial} + z/2.$$

die Vertauschungsrelationen $[a, a^*] = 1$, $[b, b^*] = 1$, $[a, b] = 0 = [a, b^*]$ erfüllen, d.h. a, b und

a^*,b^* verhalten sich wie unabhängige Vernichtunsg-/Erzeugungs-Operatoren. Außerdem gilt

$$K = -i\partial_\varphi = z\partial - \overline{z}\overline{\partial} = (b^*b - a^*a),$$
$$H = a^*a + \tfrac{1}{2}.$$

Zu beachten ist, dass die Energie der Zustände von b unabhängig ist. Die Eigenzustände von H sind natürlich auch Eigenzuständen von $N = a^*a$. Sei $a^*a\psi = c\psi$; dann $a^*a\,a\psi = (c-1)a\psi$, d.h. der Zustand $a\psi$ ist auch ein Eigenzustand von a^*a jedoch zum Eigenwert $c-1$. Nun der Operator a^*a ist offensichtlich positiv, woraus folgt unmittelbar, dass es einen Zustand $|0\rangle$ geben muss, der durch a vernichtet sein soll, $a|0\rangle = 0$. Die Wellenfunktion dieses Zustands erfüllt

$$\partial_{\overline{z}}\psi + z/2\psi = 0.$$

(Wir betrachten z und $\overline{z}$ als unabhängige Variablen.) Wir finden also

$$\psi = g(z)e^{-|z|^2/2},$$

wobei $g(z)$ für eine beliebige analytische Funktion von z steht. Das ist die Entartung des Zustands $|0\rangle$. Wegen $[H,b] = 0$ folgt, dass die Zustände $(b^*)^m|k\rangle$ die gleiche Energie wie $|k\rangle = (a^*)^n|0\rangle$ besitzen. Man sieht sofort, dass die Anwendung von b^* auf $|0\rangle$ gleichbedeutend mit einer Multiplikation mit z ist. Sei $g^{(n)}$ die n-te Ableitung von $g(z)$ am $z = 0$, dann gilt

$$g(z)e^{-|z|^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}}{n!}\,(b^*)^n e^{-|z|^2/2},$$

d.h. $g(z)e^{-|z|^2/2}$ (die entartete Form von $|0\rangle$) kann als eine Überlagerung von Zuständen $(b^*)^n e^{-|z|^2/2}$ verstanden werden. Wegen

$$-i\partial_\varphi = z\partial - \overline{z}\overline{\partial} = (b^*b - a^*a)$$

folgt, dass das Spektrum von b^*b diskret sein muss (die Wellenfunktionen mussen periodisch bzgl. φ sein). Wie im Fall von a^*a ist b^*b ein positiver Operator und b erniedrigt der Wert dieses Operators um 1, also muss es einen von Zustand geben, der von b vernichtet wird. Wir definieren also

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-|z|^2/2}$$

und

$$|mn\rangle = \frac{(a^*)^n(b^*)^m}{\sqrt{n!m!}}|00\rangle, \qquad m \geq 0,\ n \geq 0.$$

Der Zustand $|00\rangle$ wird von a sowie von b vernichtet. Die Zustände $|mn\rangle$ sind Eigenzustände von K zum Eigenwert $m-n$ und haben Energien $E_{mn} = n + 1/2$.

Die Ströme diskutiert man am besten in dem man die radiale und azimutale Komponenten berechnet; wegen

$$\partial_\varphi = -y\partial_x + x\partial_y, \qquad \partial_r = \tfrac{x}{r}\partial_x + \tfrac{y}{r}\partial_y$$

und

$$\Pi_x = -i\partial_x + \frac{y}{2}, \qquad \Pi_y = -i\partial_y - \frac{x}{2}$$

findet man

$$j_\varphi = \frac{-ie}{2}[\overline{\psi}\partial_\varphi\psi - \overline{\partial_\varphi\psi}\psi] - e\frac{r^2}{2}|\psi|^2$$

wobei $r^2 = x^2 + y^2$. Für $\psi = |mn\rangle$ ergibt sich

$$j_\varphi^{mn} = e\left[(m-n) - \frac{r^2}{2}\right]|\psi|^2.$$

Die radiale Komponente des Ströms verschwindet. Die Abbildunen 2 zeigt die Ströme für $|10\rangle$ und $|70\rangle$.

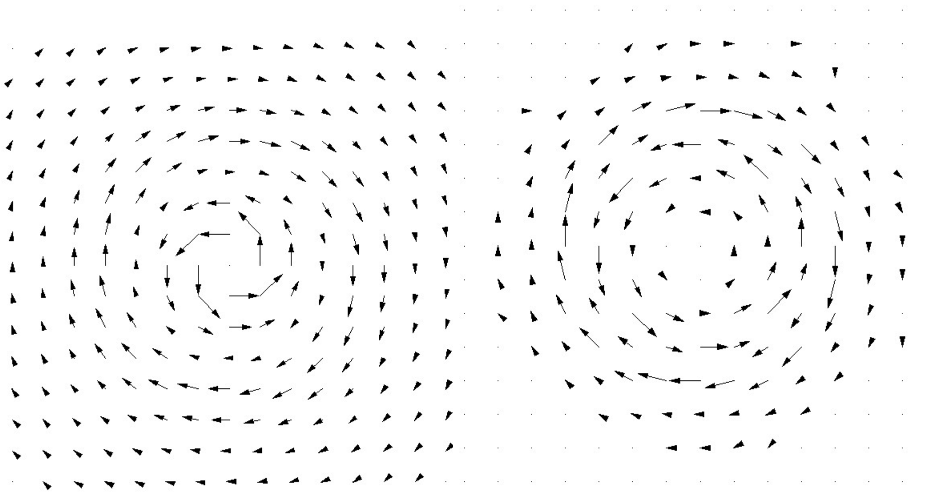

Abb. 2. Quantenmechanische Ströme von $|m0\rangle$ Zustände im homogenen magnetischen Feld (vorsicht: verschiedene Skala).

Man beachte, dass es Regionen gibt, wo die Ströme in der nicht-klassichen (positiven) Richtung fließen. Für die Erwartungswerte des Drehimpulses in der z-Richtung gilt

$$\langle J_z\rangle_{mn} = \langle x\Pi_y - y\Pi_x\rangle_{mn} = \int dxdy\, j_\varphi^{mn}/e = m - n - \frac{1}{2}\langle mn|(b^* - a)(b - a^*)|mn\rangle = \frac{m-3n}{2}.$$

Das nicht-klassiche Verhalten tritt also meistens für hohe m's.

Klassische Lösung Aus der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{e}{c}A_i v^i$$

folgen die Bewegungsgleicungen:

$$\frac{d}{dt}[v_x + \omega_c y] = 0,$$

$$\frac{d}{dt}[y_x - \omega_c x] = 0.$$

Die Lösungen hängen von vier Parameter: x_0, y_0, t_0, R,

$$x = x_0 + R\cos[\omega_c(t - t_0)]$$
$$x = y_0 - R\sin[\omega_c(t - t_0)]$$

und beschreiben eine zirkulation von Teilchen in der negativen Richtung.