UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik II

Übungsblatt 5
Solutions

15. **Störung eines entarteten Zwei-Niveau-Systems**
Allgemein erfüllen in der Störungstheorie die Glieder bis zur Ordnung λ die Gleichung

$$(H_0 - E^0)\psi^1 + (V - E^1)\psi^0 = 0,$$

wobei $\lambda V = H'$. Nun ist in unserem Problem H_0 entartet (und zweidimensional), was zur Folge hat, dass $H_0 - E^0 \equiv 0$. Sei allgemein P_0 der Projektor auf den Unterraum zu E^0. Dann folgt

$$P_0(V - E^1)P_0\psi^0 = (P_0 V P_0 - E^1)\psi^0,$$

d.h. die Korrektur(en) erster Ordnung sowie die zugehörige Vektoren (nullter Ordnung) ψ^0 sind aus dem Eigenwertproblem von $P_0 V P_0$ zu bestimmen.

Wir finden problemlos die beiden Eigenvektoren und ihre Eigenwerte

$$\psi_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E_1^1 = \lambda,$$

$$\psi_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad E_2^1 = -\lambda.$$

Es ist zu bemerken, dass man schon von Anfang an die beiden Vektoren als Basis-Vektoren des Unterraumes zu E^0 benutzen konnte. Der H_0 würde sich bei einem Basiswechsel nicht ändern und H' würde diagonal, $H' = \mathrm{diag}(\lambda, -\lambda)$.

16. **Quantensysteme mit Entartung**
Allgemein gilt in der Störungstheorie:

$$(H_0 - E_1^0)\psi_1^1 + (V - E_1^1)\psi_1^0 = 0, \tag{1}$$

$$(H_0 - E_1^0)\psi_1^2 + (V - E_1^1)\psi_1^1 - E_1^2\psi_1^0 = 0, \tag{2}$$

wobei nur die Gleichungen für die Störung des $\psi^0 = \psi_1^0$ angegeben sind. $P_0 = |\psi_1^0\rangle\langle\psi_1^0| + |\psi_2^0\rangle\langle\psi_2^0|$ sei der Projektor auf den zweidimensionalen Unterraum zu $E^0 = E$, $P_1 = |\psi_1^0\rangle\langle\psi_1^0|$ der Projektor auf ψ_1^0, $P_2 = |\psi_2^0\rangle\langle\psi_2^0|$ der Projektor auf ψ_2^0 und $Q_0 = P_3$ der Projektor auf den (eindimensionalen) Raum zu $E_0 = 2E$. Offensichtlich gilt $P_0 P_1 = P_1$, $P_1 P_0 = P_1$ und $P_0 Q_0 = 0$.

Multiplizieren wir die Gleichung (2) von rechts mit P_1, so erhalten wir

$$P_1(V - E_1^1)\psi_1^1 = E^2\psi_1^0.$$

(wegen $(H_0 - E_1^0)\psi_1^0 = 0$.) Anderseits führt eine Multiplikation von (1) von links mit Q_0 auf

$$Q_0(H_0 - E_1^0)\psi_1^1 = -Q_0 V\psi_1^0.$$

Auf dem von Q_0 ausgeschnittenen (Unter-)Hilbertraum, $Q_0\mathcal{H}$ kann nun $H_0 - E_1^0$ invertiert werden (weil die Eigenwerte von H_0 auf $Q_0\mathcal{H}$ per Annahme von E_1^0 verschieden sind). Dies führt auf

$$\psi_1^1 = \frac{Q_0\psi_1^0}{E_1^0 - H_0} \equiv |\psi_3^0\rangle\frac{\langle\psi_3^0|V|\psi_1^0\rangle}{E_1^0 - E_3^0},$$

was aus der Störungstheorie von nicht entarteten Niveaus bekannt ist. Wir wissen noch nicht was der Anteil von ψ_1^1 im $P_0\mathcal{H}$ ist. Wie immer normieren wir den Zustand so, dass $(\psi_1^0, \psi_1^n) = 0$, d.h. wir mussen noch (ψ_2^0, ψ_1^1) bestimmen, d.h.

$$\psi_1^1 = \alpha|\psi_3^0\rangle + \beta\psi_2^0,$$

mit $\alpha = \frac{\langle\psi_3^0|V|\psi_1^0\rangle}{E_1^0 - E_3^0}$ und mit einem unbestimmten β. Wir wenden jetzt P_2 auf die Gleichung (2) und finden

$$P_2(V - E_1^1)\psi_1^1 = |\psi_2^0\rangle\left[(E_2^1 - E_1^1)\beta + \langle\psi_2^0|V|\psi_3^0\rangle\alpha\right] = 0$$

Somit erhalten wir schließlich

$$\psi_1^1 = |\psi_3^0\rangle\frac{\langle\psi_3^0|V|\psi_1^0\rangle}{E_1^0 - E_3^0} - |\psi_2^0\rangle\frac{\langle\psi_2^0|V|\psi_3^0\rangle\langle\psi_3^0|V|\psi_1^0\rangle}{(E_2^1 - E_1^1)(E_1^0 - E_3^0)}$$

und

$$E_1^2 = \langle\psi_1^0|V\frac{Q_0}{E_1^0 - H_0}V|\psi_1^0\rangle.$$

Man beachte, dass der letzte Faktor in ψ_1^1 (d.h. der Zahl β) auch vom ersten Ordnung ist (obwohl es zweimal V enthält), weil $E_2^1 - E_2^1$ auch vom ersten Ordnung (d.h. klein) ist. Wegen $\langle\psi_1^0|V|\psi_2^0\rangle$ hat dieser Faktor kein Einfluß auf E_1^2.

Diese Formeln sind offensichtlich allgemein und können bei beliebiger Störung entarteter Niveaus verwendet werden (sobald die Entartung in erster Ordnung aufgehoben wird, d.h. $E_i^1 \neq E_j^1$ wenn $i \neq j$).

Insbesondere in unserem Fall finden wir

$$\psi_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_1^0 = E, \qquad E_1^1 = \lambda,$$

$$\psi_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2^0 = E, \qquad E_2^1 = -\lambda,$$

$$\psi_3^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E_3^0 = 2E, \qquad E_3^1 = -\lambda,$$

und $\langle \psi_3^0 | V | \psi_1^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} = \langle \psi_3^0 | V | \psi_2^0 \rangle$, also

$$\psi_1^1 = -\frac{\lambda}{E\sqrt{2}} |\psi_3^0\rangle - \frac{\lambda}{4E} |\psi_2^0\rangle,$$

$$E_1^2 = -\frac{\lambda^2}{2E}.$$

17. **Teilchen auf einem Kreis im homogänen elektrischen Feld**
Die ungestörten Eigenzustände sind

$$|m\rangle = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}},$$

mit $m \in \mathbb{Z}$ und $E_m = \beta m^2$, wobei $\beta = \frac{1}{2mR^2}$. Sei $\alpha = -eR\mathcal{E}/2$. Die ersten ungestörten angeregte Zustände $|1\rangle$, $|-1\rangle$ sind offensichtlich energetisch entartet. Überdies gilt:

$$\langle k | V | m \rangle = \alpha(\delta_{k,m-1} + \delta_{k,m+1})$$

und es ist leicht zu sehen, dass

$$P_a V P_a = 0$$

wobei P_a den Projektor auf den Unterraum $P_a\mathcal{H}$ der von $|1\rangle$ und $|-1\rangle$ aufgespannt wird, bezeichnet. Die Entartung wird also nicht in erster Ordnung aufgehoben, d.h. die Gleichung

$$(V - E^1)\psi = 0$$

kann auf dem Unterraum $P_a\mathcal{H}$ von einer beliebigen Linearkombination von $|1\rangle$ und $|-1\rangle$ erfüllt werden. Nun kann die Gleichung der zweiten Ordnung der Störungstheorie

$$(H_0 - E_1^0)\psi_1^2 + (V - E^1)\psi_1^1 - E_1^2\psi_1^0 = 0,$$

auf $P_a\mathcal{H}$ projiziert werden. Wir erhalten

$$P_a(V - E^1)\psi_1^1 = E^2\psi_1^0.$$

Anderseits folgt aus der Gleichung der ersten Ordnung wie üblich

$$Q_a\psi_1^1 = -\frac{Q_a V}{E_0 - H_0}\psi_1^0$$

mit $Q_a = \mathbf{1} - P_a$, d.h. die Gleichung ersten Ordnung bestimmt die Funktion ψ_1^1 auf $Q_a\mathcal{H}$. Insgesamt folgt

$$P_a V \frac{Q_a}{E_0 - H_0} V P_a \psi_i^0 = E^2 \psi_i^0$$

wobei $i = -1, 1$ da wir die gleiche Rechnung auch für die beiden ungestörten Zustände $\psi_{\pm 1}^0$ durchführen können (hier spielt der in $P_a\mathcal{H}$ liegende Anteil von ψ_i^0 keine Rolle, weil $P_a(V - E^1)P_a\psi$ verschwidtet wegen Entartung von E^1). Die obige Gleichung ist ein Eigenwertsproblem auf dem zweidimensionalen Raum $P_a\mathcal{H}$. Der Operator auf der linken Seite verschwindet nicht; wir finden

$$P_a V \frac{Q_a}{E_0 - H_0} V P_a = \frac{\alpha^2}{\beta} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix geben die Korrekturen zweiter Ordnung zu der ungestörten Energie $E^0 = \beta$ an. Sie sind

$$E_- = -\frac{\alpha^2}{3\beta}$$

und

$$E_+ = \frac{5\alpha^2}{3\beta}.$$

Diesen Energiekorrekturen entsprechen die Zustände

$$\psi_-^0 = \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{\pi}},$$

und

$$\psi_+^0 = \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{\pi}}.$$