UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik II

Übungsblatt 3

Solutions

9. **Störung eines harmonischen Oszillators**

Wir führen zunächst die dimensionslosen Koordinaten:

$$y = \alpha x, \qquad \alpha^2 = \frac{\sqrt{mk}}{\hbar}$$

so dass

$$H_0 = \hbar\omega(a^* a + 1/2)$$

mit $\omega = \sqrt{k/m}$. Die Störung lässt sich durch y, oder durch die Vernichtungs-/Erzeugungs-Operatoren ausdrücken:

$$H' = \frac{by^2}{2\alpha^2} = \frac{b}{4\alpha^2}\,(a + a^*)^2.$$

Aus der Störungstheorie ergibt sich

$$b\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle n|H'|0\rangle}{\hbar\omega(0-n)}\,|n\rangle = -\frac{b\sqrt{2}}{4k\cdot 2}\,|2\rangle$$

wegen $\hbar\alpha\omega = k$. Hier $|n\rangle$ steht für die n-te normierte Energieeigenfunktion des ungestörten Oszillators. Damit ist die Grundzustandswellenfunktion im ersten Ordnung gegeben durch

$$|\tilde{0}\rangle = |0\rangle - \frac{b\sqrt{2}}{8k}|2\rangle.$$

Sie ist auch im diesen Ordnung normiert[1]. Bekanntlich lassen sich die Funktionen $|n\rangle$ leicht berechnen:

$$|0\rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,\exp\left[-\frac{\alpha^2 x^2}{2}\right] \tag{1}$$

$$|1\rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\,2\alpha x \exp\left[-\frac{\alpha^2 x^2}{2}\right] \tag{2}$$

$$\sqrt{2}|2\rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,(2\alpha^2 x^2 - 1)\exp\left[-\frac{\alpha^2 x^2}{2}\right] \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

[1]Die Korrektur zur Normierung ist vom zweiten Ordnung in b.

Die Grundzustandswellenfunktion ist auch explizit exakt berechenbar, wenn die Störung als ein Teil des harmonischen Potential betrachtet ist. Die exakte $\tilde{\alpha}$ erfüllt

$$\tilde{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{2m(k+b)}}{\hbar} = \alpha^2 \cdot (1 + b/k)^{1/2},$$

und die exakte Grundzustandswellenfuntion ist

$$|\tilde{0}\rangle_{ex} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,(1+b/k)^{1/8} \exp\left[-\frac{\alpha^2 x^2}{2}(1+b/k)^{1/2}\right].$$

Für kleine b beim festen (und kleinen) x lautet die Taylor-Entwicklung

$$|\tilde{0}\rangle_{ex} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left[-\frac{\alpha^2 x^2}{2}\right]\left(1 + \frac{b}{8k} - \frac{b}{4k}\,\alpha^2 x^2\right).$$

Diese Entwicklung stimmt mit dem störungstheoretischen Ergebniss, $|\tilde{0}\rangle$, überein.

10. **Elektrische Suszeptibilität**
Die Wellenfunktionen,

$$|k\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right), \qquad \text{mit } k = 2n+1, \tag{5}$$

$$|k\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right), \qquad \text{mit } k = 2n, \tag{6}$$

sind Eigenfunktionen des ungestörten Hamiltonoperators zu den Eigenwerten $E_k = \frac{\pi^2\hbar^2 k^2}{2ma^2}$. In einem elektrischen Feld ist die Grundzustandswellenfunktion im ersten Ordnung gegeben durch

$$|\tilde{1}\rangle = |1\rangle + \sum_{k>1} a_k |k\rangle$$

mit $a_k = 0$ für ungerade k, und

$$a_k = E \cdot \frac{B}{k^2-1} \int_{-\pi/2}^{\pi_2} dy \sin(2ny)\, y\, \cos(y) =,$$

für $k = 2n$ und mit

$$B = \frac{4mea^3}{\hbar^2\pi^4}.$$

($E \cdot B$ ist dimensionslos, wie es sein soll.) Man findet leicht

$$\int_{-\pi/2}^{\pi_2} dy \sin(2ny)\, y\, \cos(y) = -\frac{4(-)^n k}{(1-k^2)^2} \equiv c_n.$$

Die Matrixelemente des Dipolmoment-Operators $\langle 2m|ex|2n\rangle$ verschwinden aus der Paritätsgrunden, und wir erhalten schließlich:

$$\langle\tilde{1}|ex|\tilde{1}\rangle = \frac{4ea}{\pi^2}\, E\, B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{k^2-1}.$$

Die elektrische Suszeptibilität ist damit positiv; nur $n = 1$ trägt wesentlich zu der Suszeptibilität:

$$\langle\tilde{1}|ex|\tilde{1}\rangle \approx E \cdot \frac{1024}{729} \frac{me^2a^4}{\hbar^2\pi^6}$$

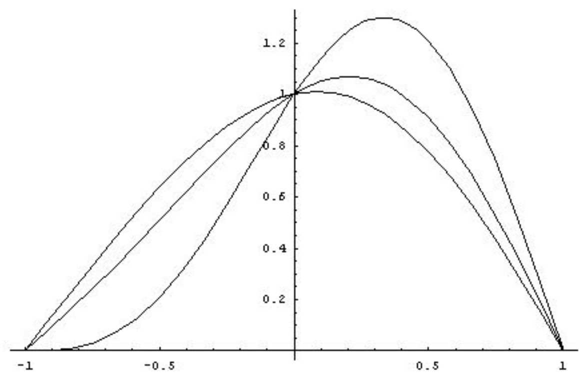

Abbildung 1: Grundzustandswellenfunktionen $|\tilde{1}\rangle$ für verschiedene elektrische Felder.

11. **Weiße Zwergen**
Mit der allgemeinen Zustandsgleichung

$$P = Kn^{\gamma},$$

durch Einsetzen von (1) ins (2) erhielt man

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2 f'\right)' = -\frac{4\pi G m^2}{K(N+1)} f^N \equiv -A f^N,$$

wobei $\gamma = \frac{N+1}{N}$. Diese im Allgemeinen nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung die als Lane-Emden-Gleichung bekannt ist hat interresante Eigenschaften. Zunächst führt die Substitution

$$f(r) = \beta g(r/R)$$

auf

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{dg}{dx}\right) = -g^N(x)$$

wenn

$$\beta = (AR^2)^{-\frac{1}{N-1}},$$

wobei R beliebig und $x = r/R$ dimensionslos ist. Wir suchen für die Lösungen die analytisch bei $x = 0$ sind[2]. Solche Lösungen existieren nur wenn $g'(x) = 0$ bei $x = 0$.

Sobald eine Lösung, z.B. $g(0) = 1$, bekannt ist können durch ein geeignetes Wahl von R (und β) alle Lösungen mit $g(0) = const$ konstruiert werden.

Die Lösungen haben allgemein noch die Eigenschaft, dass sie monoton fallend sind (was aus der Positivität von g und aus $g' = -\frac{1}{x^2}\int_0^x ds\, s^2 g^N(s)$ unmittelbar folgt), und dass sie (für nichtrelativistische $N = \frac{3}{2}$ und relativistische $N = 3$ Fermionen) bei einem endlichen x eine Nullstelle haben (d.h. die Sterne sind kompakt).

Wir nehmen an, dass die Lösung unserer Differentialgleichung mit $g(1) = 0$ gegeben ist (z.B. numerisch). Die (Elektronen-) Teilchendichte $n(x)$ kann durch $g(x)$ ausgedrückt werden

$$n(r) = (AR^2)^{-\frac{N}{N-1}} g^N(r/R).$$

Sie erstreckt sich von $r = 0$ bis zu $r = R$. Die Masse des Sterns hängt von R ab. Wir finden

$$M = 4\pi \int_0^R r^2 dr\, n(r) = 4\pi R^3 (AR^2)^{-\frac{N}{N-1}} \int_0^1 x^2 dx\, g^N(x).$$

Das Integral auf der rechten Seite ist dimensionslos und liefert nur einen Faktor. Für nichtrelativistische Fermionen ist $N = \frac{3}{2}$ und somit $M \sim 1/R^3$ (je kleiner der Stern desto massiver (wegen grösserer Dichte)). Erstaunlicherweise genau für relativistische Fermionen (also für Elektronen in einem massiven Stern), $N = 3$ ist M von R unabhängig, was bedeutet, dass die Gleichgewicht nur für eine Masse möglich ist (für grossere Massen kollabiert der Stern und für kleinere Massen dehnt er sich ohne Ende).

[2]Für nichtanalytische (z.B. singuläre) Lösungen muss man bei $r = 0$ besonders aufpassen. Auf Grund der Nichtlinearität darf $g(x)$ nicht sogar als Distribution genommen werden.