UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik II

Übungsblatt 2
Solutions

1. **Nichtrelativistisches Fermi-Gas bei T=0**
   Aus der Bedingung, dass der Anzahl von Zuständen bis $|\vec{p}| = p_f$ muss gleich N sein finden wir:
   $$N = \frac{\gamma p_f^3}{3} = \frac{g p_f^3}{6\pi^2\hbar^3},$$
   also
   $$p_f = \hbar \left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{1/3} n^{1/3}.$$
   Anderseits, aus
   $$U = \int d^3x \int_{|\vec{p}|\leqslant p_f} \frac{d^3p}{h^3} \frac{p^2}{2m}$$
   folgt
   $$\frac{U}{V} = \gamma \frac{p_f^5}{10m} = \frac{3\hbar^2}{10m} \left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{2/3} n^{5/3}$$
   und die Zustandsgleichung folgt jetzt unmittelbar aus $P = \frac{2}{3}\frac{U}{V}$.

2. **Semiklassisches Atom-Model**
   Aus der Euler-Gleichg, wenn der Druck mit Hilfe der Zustandsgleichung durch n ausdruckt wird, folgt eine gewönliche Differentialgleichung erster Ordnung für $n(r)$. Diese Gleichung ist trivial zu intergieren; es ergibt sich
   $$Ze^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{\frac{2}{3}} n^{\frac{2}{3}}$$
   wobei $R > r$ die Integrationskonstante bezeichnet (die Wolke erstreckt sich von $r = 0$ bis zu $r = R$). Man beachte, dass beide Seiten der obiegen Gleichung die Diemension der Energie besitzen.

   Die Verteilung muss noch normiert werden:
   $$N = \int d^3x\, n(r) = 4\pi A \int_0^R r^2 dr \left(\frac{r-R}{rR}\right)^{3/2}.$$
   Wegen
   $$\int_0^1 x^2 dx \left(\frac{x-1}{x}\right)^{3/2} = \frac{\pi}{16}$$

ist die Normierung möglich obwohl die Verteilung bei $n = 0$ singulär wird. Aus dieser Bedingung lässt sich R als Funktion von N ausdrücken:

$$R = \left(\frac{4N}{A\pi^2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

und schließlich

$$n(r) = A\left[\left(\frac{A\pi^2}{4N}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{r}\right]^{\frac{3}{2}},$$

wobei

$$A = \left[\frac{2mZe^2}{\hbar^2(6\pi^2/g)^{2/3}}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

3. **Zweidimensionale und relativistische Fermi-Gasen**
Im dreidimensionalen Fall, eine partielle Integration bzg. p für Ω führt zu

$$\Omega_3 = -\frac{V\gamma}{3}\int_0^{p_f} p^2 dp \, \frac{1}{1+e^{(E-\mu)\beta}} \cdot \frac{dE_p}{dp} \cdot p.$$

Nun ein Vergleich mit der Formula für U zeigt sofort, dass

$$\Omega_3 = -\frac{2}{3}U, \qquad \text{wenn } E_p = \frac{p^2}{2m}$$

und

$$\Omega_3 = -\frac{1}{3}U, \qquad \text{wenn } E_p = pc.$$

Im zweidimensionalen Fall gilt

$$\Omega_2 = -\frac{S\gamma_2}{2}\int_0^{p_f} pdp \, \frac{1}{1+e^{(E-\mu)\beta}} \cdot \frac{dE_p}{dp} \cdot p.$$

wobei

$$\gamma_2 = \frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^2},$$

und es ergibt sich

$$\Omega_2 = -U, \qquad \text{wenn } E_p = \frac{p^2}{2m},$$

also für nichtrelativistische Fermionen in 2D, und

$$\Omega_2 = -\frac{1}{2}U, \qquad \text{wenn } E_p = pc,$$

für ultrarelativistische zweidimensionale Fermionen. Die entsprechende Zustandgleichungen sind in der folgenden Taffel zusammengefasst. Zu beachten ist, dass die $T = 0$ relativistische Zustandsgleichungen gelten nur solange die Schallgeschwindigkeit, $c_s = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{dP}{dn}}$, kleiner als

Typ	$p_f(n)$	$P(U)$	$P(n)$
3D NR	$p_f = \hbar \left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{1/3} n^{1/3}$	$P = \frac{2}{3}U$	$\frac{\hbar^2}{5m}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{2/3} n^{5/3}$
3D REL	—‖—	$P = \frac{U}{3}$	$\frac{\pi^2 c\hbar}{4}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{1/3} n^{4/3}$
2D NR	$2\hbar\sqrt{\pi}\, n^{1/2}$	$P = U$	$\frac{\pi\hbar^2}{2m} n^2$
2D REL	—‖—	$P = \frac{U}{2}$	$\frac{2\sqrt{\pi}c\hbar}{3} n^{3/2}$

Tabelle 1: Eigenschaften von Fermi-Gasen bei $T = 0$

die Lichtgeschwindigkeit ist.