# UNIVERSITÄT LEIPZIG
## INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik II

Übungsblatt 11

*Solutions*

30. Die Formel

$$R_{l+1}(x) = -x^l \frac{d}{dx}\left(\frac{R_l}{x^l}\right)$$

lässt sich leicht beweisen durch Narchrechnen. Wir finden rekursiv die folgende Funktionen:

$$\begin{aligned}
j_0(x) &= \frac{\sin x}{x} & n_0(x) &= \frac{\cos x}{x} \\
j_1(x) &= \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} & n_1(x) &= \frac{\cos x}{x^2} + \frac{\sin x}{x} \\
j_2(x) &= \left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\frac{\sin x}{x} - \frac{3\cos x}{x^2} & n_2(x) &= \left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\frac{\cos x}{x} + \frac{3\sin x}{x^2},
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
h_0(x) &= \frac{\exp(ix)}{ix} \\
h_1(x) &= \left(\frac{1}{ix^2} - \frac{1}{x}\right)\exp(ix) \\
h_2(x) &= \left(\frac{i}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{3i}{x^3}\right)\exp(ix).
\end{aligned}$$

31. Mit

$$\begin{aligned}
Y_0^0 &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\
Y_0^1 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \\
Y_0^2 &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1)
\end{aligned}$$

und

$$\int_{-1}^{1} e^{ixs} ds = 2\frac{\sin x}{x}$$

finden wir

$$\left(e^{ix\cos\theta}, Y_0^0\right) = \sqrt{4\pi}\,\frac{\sin x}{x} = \sqrt{4\pi} j_0(x),$$
$$\left(e^{ix\cos\theta}, Y_0^1\right) = 2\sqrt{3\pi}\,(-i\partial_x)\,\frac{\sin x}{x} = 2\sqrt{3\pi}i\,j_1(x),$$
$$\left(e^{ix\cos\theta}, Y_0^2\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5\pi}\,(-3\partial_x^2 - 1)\,\frac{\sin x}{x} = -\sqrt{5\pi}j_2(x)$$

wegen

$$j_0'' = j_2 - \frac{1}{x}j_1.$$

Damit sind: $c_0 = \sqrt{4\pi}$, $c_1 = 2i\sqrt{3\pi}$, $c_2 = -\sqrt{5\pi}$. Hier treten nur die $j-$Funktionen weil die ebene Welle überall regulär ist, und damit kann ihre entwicklung keine singuläre Funktionen enthalten.

32. Per Definition gibt es eine Zerlegung

$$\Psi = \sum_{l=0}^{\infty}\left[\overline{c_l} j_l(x) Y_0^l(\theta) + a_l h_l(x) Y_0^l(\theta)\right].$$

Nun die Projektion des Gradients von $\Psi$ auf den Normalvektor der Kugel bei $r = 1$ enthält natürlich keine Winkelableitungen. Damit muss gelten

$$\partial_x(\Psi)|_{x=k} = 0.$$

Diese Bedingung liefert die $a_l$ für jedes $l$ eindeutig fest, weil die $c_l$ für jedes $l$ bekannt sind:

$$a_l = -\overline{c_l}\,\frac{j_l'(k)}{h_l'(k)}.$$

Das ist schon die gesuchte Lösung. Man kann nun die lokale quantenmechanische Wahrscheinlichkeitstrome skizzieren:

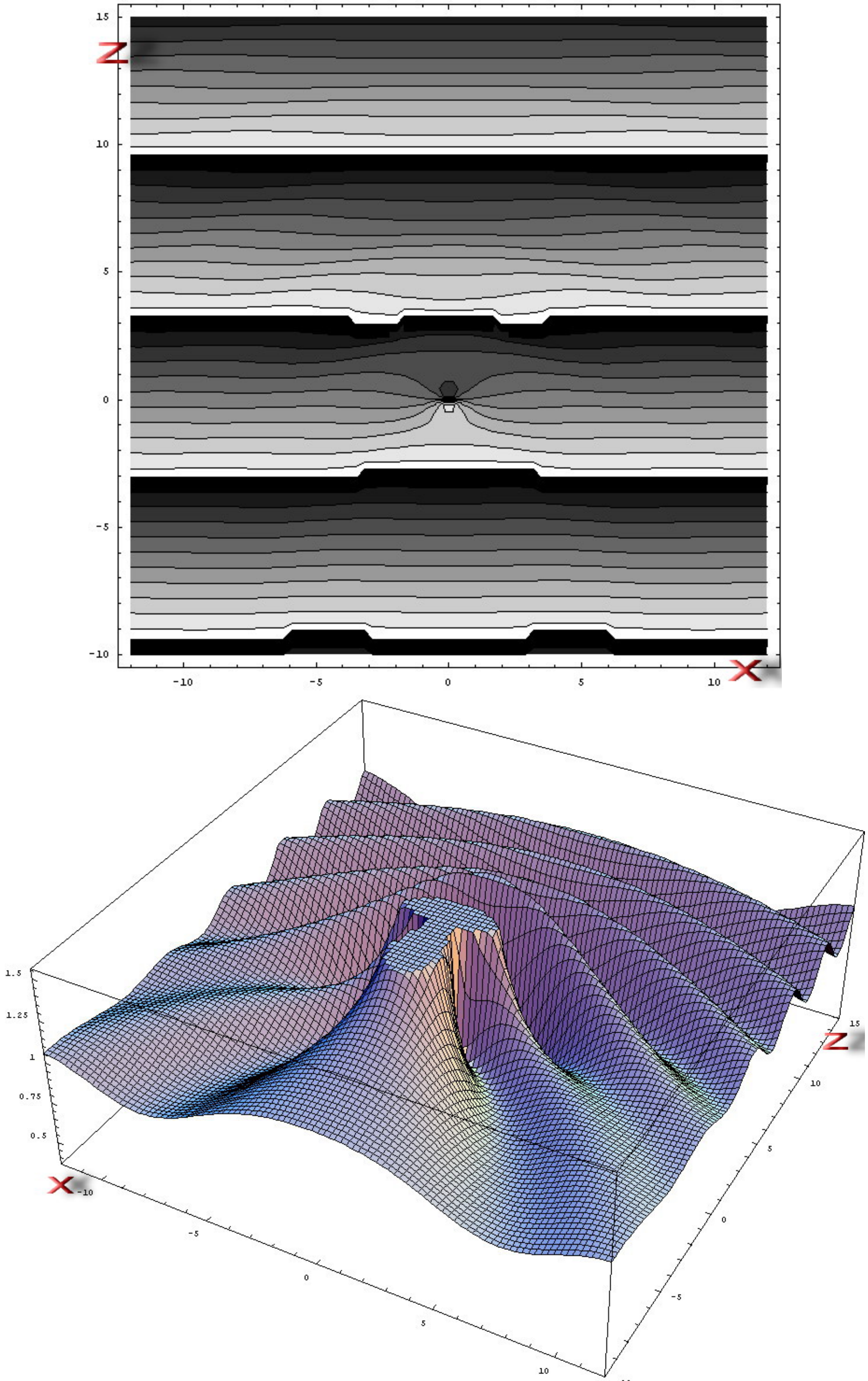


Abbildung: Die Phase und Amplitude der Lösung. Der Term $\exp[-ikz]$ beschreibt eine aus der positiven z-Richtung kommende Welle.