UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik II

Übungsblatt 1

Solutions

1. **Entartungsdruck**

   Bekanntlich für ein Kastenpotential $x \in [0, L]$ findet man die Wellenfunktionen

   $$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(k_n x) \qquad \text{mit } k_n = \frac{n\pi}{L}$$

   deren Energien gleich

   $$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m\,L^2}\,n^2$$

   sind.Der Zustand niedrigster Energie, für drei Bosonen, erhielt man offensichtlich wenn alle drei Teilchen im Zustand ψ_1 sind, d.h.

   $$\Psi_B(x_1, x_2, x_3) = \psi_1(x_1) \otimes \psi_1(x_2) \otimes \psi_1(x_3).$$

   Die Energie dieses Zustands ist $E_B = 3E_1$. Für Fermionen muss die Wellenfunktion $\Psi_F(x_1, x_2, x_3)$ antisymmetrisch unter der Vertauschung von Teilchen sein (wir haben damit angenommen, dass die Teilchen sich im gleichen Spin-Zustand befinden). Um den Zustand niedrigster Energie für drei Fermionen zu konstruieren muss man also ψ_1 bis ψ_3 nutzen:

   $$\Psi_F(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\epsilon^{ijk}\,\psi_i(x_1) \otimes \psi_j(x_2) \otimes \psi_k(x_3),$$

   mit $i, j, k = 1\dots3$. Diesen Zustand enspricht die Energie

   $$E_F = E_1(1^2 + 2^2 + 3^2) = 14E_1.$$

   Für N Bosonen wurde man $E_B = NE_1$ und $E_F = E_1 \cdot N(N+1)(2N+1)/6$ erwarten. Offensichtlich wächst die Energie viel schneller im fermionischen Fall. Weiterhin, fällt die Energie (im beiden Fallen) mit der Abstand L ab, d.h. die Teilchen üben eine abstösende Kraft (die proportional zu $-1/L^3$ ist) auf die Wände.

2. **Addition von Drehimpulsen**
Wir fangen an mit dem Zustand $|22\rangle$ (d.h. der Gesamtdrehimpuls $J = 2$, die z-Projektion $m = 2$). Offensichtlich als einzige Möglichkeit für $m = 2$ gibt es

$$|\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \equiv |22\rangle.$$

Analog gilt

$$|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \equiv |2, -2\rangle.$$

Durch die Anwendung von J_- auf $|22\rangle$ erhalten wir einerseits

$$J_-|22\rangle = \sqrt{4}\,|21\rangle$$

und anderseits

$$[j_- \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes j_-]|\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{3}|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle,$$

so dass

$$|21\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{2}|\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle.$$

Durch die Anwendung von J_- können jetzt $|20\rangle$ und $|2, -1\rangle$ bestimmt werden:

$$|20\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|2, -1\rangle = \frac{1}{2}|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle.$$

Um $|11\rangle$ zu bestimmen nehmen wir den allgemeinen Ansatz

$$|11\rangle = a|\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle + b|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle$$

und wenden J_+ auf beiden Seiten an. Dies führt auf

$$0 = (a + b\sqrt{3})|\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle,$$

woraus folgt, dass $a = -b\sqrt{3}$. Anderseits, wegen der Normierung muss $|a|^2 + |b|^2 = 1$ sein, d.h. $|b| = 1/2$. Die Phase von b kann noch beliebig gewählt werden ohne die Eigenschaften von $|11\rangle$ zu beeinflussen. Wir wählen $b = 1/2$, also

$$|11\rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2}|\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{2}|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle.$$

Nun durch die Anwendung von J_- kriegen wir zunächst

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

und schließlich

$$|1, -1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{1}{2}|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle.$$

Auf diese Weise haben wir den Tensorprodukt-Raum $\mathcal{H}_{3/2} \otimes \mathcal{H}_{1/2}$ ins eine direkte Summe $\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_1$ zerlegt. Somit wissen wir welche Tensorprodukt-Zustände gleich Eigenzuständen des (quadrierten) Gesamtdrehimpulses J^2 und des J_3 sind.