UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik I

Übungsblatt 9
Solutions

26. **Kugelflächenfunktionen als Polynome von x, y, z**
Tatsächlich lassen sich die Kugelflächenfunktionen als, sogar homogene, Polynome von

$$\begin{aligned} w_0 &= z/r = \cos(\theta), \\ w_\pm &= (x \pm iy)/\sqrt{2} = \sin(\theta)\exp(\pm i\varphi)/\sqrt{2} \end{aligned}$$

ausdrücken:

$$\begin{aligned} Y_0^1 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, w_0 \\ Y_{\pm 1}^1 &= \mp\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, w_\pm \end{aligned}$$

für $\ell = 1$ und

$$\begin{aligned} Y_2^2 &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\, (w_+)^2 \\ Y_1^2 &= \sqrt{\frac{15}{4\pi}}\, w_+ w_0 \\ Y_0^2 &= \sqrt{\frac{5}{8\pi}}\, (w_0^2 - w_+ w_-) \\ Y_{-1}^2 &= -\sqrt{\frac{15}{4\pi}}\, w_- w_0 \\ Y_{-2}^2 &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\, (w_-)^2 \end{aligned}$$

für $\ell = 1$. Man beachte, dass verschiedene Konventionen für die Wahl der Phasen der Kugelflächenfunktionen in Benutzung bleiben (weil, sogar wenn alle Funktionen mit verschiedenen Phasen $\exp[-i\alpha_{lm}]$ multipliziert sind, bleibt das System orthonormal). Unsere Konvention stimmt mit der deutschen Wikipedia überein. Die Wahl der Konvention beeinflußt offensichtlich die Matrixelemente verschiedener Operatoren.

Bei einer Paritätstransformation, P, ändern die Variablen w_0, $w_\pm$ ihre Vorzeichen. Es ist damit leicht zu sehen, dass die Kugelflächefunktionen zu $\ell = 1$ ungerade sind ($P\,Y^1_m = -Y^1_m$), und die zu $\ell = 2$ gerade sind, ($P\,Y^2_m = Y^2_m$). Als eine Verallgemeinerung man kann zeigen, dass

$$PY^l_m = (-1)^l Y^l_m.$$

27. **Summationsformel**
Die Formel ist leicht zu beweisen, im Fall $\ell = 1, 2$, durch nachrechnen. (Für $\ell = 2$ lohnt es sich, z.B., alle Funktionen durch $\sin^2\theta$ auszudrücken.) Allgemein, es ist klar, dass wenn die Summe

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y^l_m(\theta,\varphi)|^2$$

vom θ unabhängig ist, muss sie gleich $\frac{2l+1}{4\pi}$ sein (es reicht die Summe über die Sphere zu integrieren, und die Normierung des Y^l_m auszunutzen).

28. **Drehung einer Kugelflächenfunktion**
In dieser Aufgabe lohnt es sich, die Ergebnisse der Aufgabe 24 zu benutzen. Der komplexen Hilbertraum der von Y^1_m, $m = -1, 0, 1$ aufgespannt wird, darf mit dem $\mathbb{C}^3$ Raum identifiziert werden: wir identifizieren die Eigenvektoren von L_3, d.h. die Kugelflächenfunktionen Y^1_{-1}, Y^1_0, Y^1_1 mit den entsprechenden Eigenvektoren des J_3 (Matrix-)Operators in

$\mathbb{C}^3$, d.h. mit v_-, v_0 und v_+, wobei[1]

$$v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} / \sqrt{2} \qquad v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_- = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} / \sqrt{2}$$

Die Aufgabe vereinfacht sich damit, und es muss nur die Drehung des Vektors v_0 um die x-Achse betrachtet werden. Die gedrehten Vektoren gewinnt man aus der Formel $v' = R(\alpha)\, v$ mit

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

wobei $R(\alpha)$ kann auch als $e^{iJ_x\alpha}$ verstanden werden. Nun die Funktion $Y_0^1 = \frac{3}{4\pi}\cos\theta$ enspricht dem Vektor v_0. Die Drehung führt auf

$$R(\alpha)v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \cos\alpha\, v_0 - \frac{i}{\sqrt{2}}(v_+ + v_-).$$

Der letzte Vektor wird mit

$$\cos\alpha Y_0^1 - \frac{i}{\sqrt{2}}(Y_1^1 + Y_{-1}^1)$$

identifiziert. Wegen $Y_{\pm1}^1 = \pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}$ erhalten wir endlich

$$R(\alpha)\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\left[\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta\sin\varphi\right].$$

[1]Dieser Wahl der Phasenkonvention respektiert die Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} L_+Y_m^l &= \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}Y_{m+1}^l, \\ L_-Y_m^l &= \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}Y_{m-1}^l \end{aligned}$$

die auch für $J_\pm$ und $v_0, v_\pm$ gelten sollen.