UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik I

Übungsblatt 7

Solutions

1. **Teilchen im zweidimensionalen harmonischen Potential**

   Wegen Abhängigkeit der Wechselwirkung von $(x-y)$ lohnt es sich die Relativkoordinate und die Schwerpunktkoordinate einzuführen:

$$\begin{aligned} 2r &= x - y \\ 2s &= x + y. \end{aligned}$$

   Eine einfache Umrechnung der patiellen Ableitungen führt auf

$$\begin{aligned} \partial_s &= \partial_x + \partial_y \\ \partial_r &= \partial_x - \partial_y. \end{aligned}$$

   Mit Hilfe von diesen Koordinaten der Hamiltonoperator nimmt eine einfache Form:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\left[-\frac{1}{2}\partial_s^2 + 2s^2 - \frac{1}{2}\partial_r^2 + 2(1+4\alpha^2)r^2\right]$$

   Eine weitere Substitution,

$$\begin{aligned} x' &= s\sqrt{2} \\ y' &= r\sqrt{2}\cdot(1+4\alpha^2)^{1/4} \end{aligned}$$

   reduziert endlich das Problem zu zwei harmonischen Oszillatoren:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\left[-\partial_{x'}^2 + (x')^2\right] + \frac{\hbar\omega'}{2}\left[-\partial_{y'}^2 + (y')^2\right].$$

   wobei

$$\omega' = \omega\sqrt{1+4\alpha^2}$$

für die Frequenz der Schwingung in der relativen Richtung steht. Die Äquipotentiallinien sind durch

$$(x+y)^2 + (1+2\alpha^2)(x-y)^2 = 2V$$

gegeben. Sie beschreiben eine um $\pi/4$ gedrehte Ellipse mit den Halbachsen der Länge $\sqrt{2V}$ und $\sqrt{2V/(1+2\alpha^2)}$.

2. **Drehimpuls im zweidimensionalen Fall**

Seien x und y dimensionslos. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = x\partial_y - y\partial_x = \left(\frac{a+a^*}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{b-b^*}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{b+b^*}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{a-a^*}{\sqrt{2}}\right) = a^*b - ab^*,$$

wobei die Orts- und Impulsoperatoren durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausgedrückt worden sind. Nun muss offensichtlich $[a,b] = 0 = [a,b^*]$ wegen $\partial_x(y) = 0 = \partial_y(x)$. Damit erhalten wir

$$J = i(ab^* - a^*b).$$

Dieser Operator ist selbstadjungiert weil a^* adjungiert zu a und b^* adjungiet zu b sind. Unter Benutzung der bekannten Kommutationsregeln $[a,a^*] = 1 = [b,b^*]$ finden wir unmittelbar

$$\begin{aligned} [J,a] &= ib, \\ [J,b] &= -ia. \end{aligned}$$

(Die übrigen Kommutatoren folgen via hermitischer Konjugation der obigen Regeln.) Nun ergibt sich (wegen $J\psi_0 = 0$)

$$J\psi_a = Ja^*\psi_0 = a^*J\psi_0 + ib^*\psi_0 = ib^*\psi_0,$$

und damit kann $ib^*\psi_0$ nicht proportional zu ψ_a sein (z.B. wegen $(a^*\psi_0, b^*\psi_0) = 0$.).

Dagegen

$$J\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}[ib^* + i(-i)a^*]\psi_0 = \psi_+,$$

d.h. der angeregte Zustand ψ_+ ist ein Eigenzustand des Drehimpulses (besitzt ein scharfes Drehimpuls).

3. **Winkeloperator in der Quantenmechanik**

Die Eigenfunktionen, ψ_m, des Drehimpulsoperators, $J = -i\partial_\varphi$, zu den Eigenwerten $m \in \mathbb{R}$, erfüllen

$$-i\partial_\varphi \psi_m = m\psi_m$$

d.h. bis auf die Normierung gilt

$$\psi_m = e^{im\varphi}.$$

Nun $\psi_m(0) = \psi_m(2\pi)$ gilt nur wenn m ganzzahlig ist, $m \in \mathbb{Z}$.

Die Kommutationsregel

$$[\hat{\varphi}, J] = i\hbar,$$

wobei $\hat{\varphi}$ der potenziellen Winkeloperator bezeichnet, hat wirklich kein Sinn, was man sofort bei der Berechnung von Erwartungswerten sieht:

$$(\psi_n, [\hat{\varphi}, J]\psi_n) = (\psi_n, J\hat{\varphi} - \hat{\varphi}J\,\psi_n) = (n\,\psi_n, \hat{\varphi}\,\psi_n) - (\psi_n, \hat{\varphi}n\,\psi_n) = 0.$$

(Man beachte, dass $\hat{\varphi}$ als ein Multiplikationsoperator beschränkt sein sollte, $(f, \hat{\varphi}f) \leq 2\pi||f||^2$.) Anderseits führt die Kommutationsregel auf

$$(\psi_n, [\hat{\varphi}, J]\psi_n) = (\psi_n, i\hbar\psi_n) = i\hbar.$$