UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik I

Übungsblatt 6
Solutions

Aufgabe 17

Die Beziehungen

$$[a, a^*] = 1$$

$$H = \hbar\omega_c \left(a^* a + \frac{1}{2} \right)$$

$$[a, H] = \hbar\omega a$$

ergeben sich durch schieres Vorwärtsrechnen unter Ausnutzung des Zusammenhanges

$$[p, x] = -i\hbar$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} H(a\psi_E) &= \hbar\omega_c(a^*a + 1/2)(a\psi_E) = \hbar\omega_c(aa^*a - a + a \cdot \tfrac{1}{2})(\psi_E) = \\ &= a\hbar\omega_c(a^*a + \tfrac{1}{2} - 1)(\psi_E) = a(E - \hbar\omega_c)\psi_E = (E - \hbar\omega_c)(a\psi_E) \qquad (1) \end{aligned}$$

Ebenso zeigt man

$$H(a^*\psi_E) = (E + \hbar\omega_c)(a^*\psi_E)$$

Weiterhin gilt für selbstadjungierte A

$$(\psi, A^2\psi) = (A\psi, A\psi) = ||A\psi||^2 \geq 0$$

Da ja H seinerseits aufgefasst werden kann als Summe der Quadrate zweier selbstadjungierter und folglich positiver Operatoren - nämlich des Ortes und des Impulses -, ist H ebenfalls positiv. Für Eigenfunktionen ψ_E gilt insbesondere $(\psi_E, H\psi_E) = E$. Andererseits wissen wir das n-malige Anwendung von a Eigenfuktionen zum Eigenwert $E - n\hbar\omega_c \geq 0$ ergibt, was nur dann für alle n gelten kann, wenn sich ab einem bestimmten n identisch Null ergibt. Folglich muss eine Eigenfunktion existieren, die durch a annihiliert wird. Die explizite Ortsdarstellung dieser Funktion erhalten wir, wenn wir die eindeutig lösbare Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X + \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}}P\right]\psi = a\psi = 0$$

ansetzen, deren Lösung

$$\psi = C\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right]$$

lautet.

Aufgabe 18

Zur Berechnung von $[a,(a^*)^n]$ benutzt man die vollständige Induktion:
die Behauptung ist

$$[a,(a^*)^n] = n(a^*)^{n-1},$$

was leicht für $n = 1$ verifizierbar ist.
Der Induktionsschritt sieht wie folgt aus:

$$[a,(a^*)^n] = [a,(a^*)^{n-1}]a^* + (a^*)^{n-1}[a,a^*] = (n-1)(a^*)^{n-1} + (a^*)^{n-1} = n(a^*)^{n-1}$$

wobei im vorletzten Schritt die Induktionsannahme,

$$[a,(a^*)^{n-1}] = (n-1)(a^*)^{n-2}$$

benutzt wurde.
Zur Normierung von ψ_n nehmen wir an, dass ψ_{n-1} schon normiert ist und dass $\psi_n = ca^*\psi_{n-1}$ (wobei c die gesuchte Konstante bezeichnet).
Dann gilt:

$$1 \equiv |c|^2(a^*\psi_{n-1}, a^*\psi_{n-1}) = |c|^2(\psi_{n-1}, aa^*\psi_{n-1}) = |c|^2\left(\psi_{n-1}, (1 + a^*a)\psi_{n-1}\right) = |c|^2 \cdot n,$$

wegen

$$a^*a\psi_{n-1} = (n-1)\psi_{n-1},$$

was aus der Aufgabe 17 bekannt ist, oder aus $[a^*a, (a^*)^n] = n(a^*)^n$ unmittelbar folgt. Damit finden wir: $c = 1/\sqrt{n}$, und insgesamt

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,(a^*)^n\psi_0.$$

Die Formeln (10),(11) (in der Aufgabenstellung) sind Spezialfälle der obigen Formel.
Die Berechnung von Erwartungswerten ist besonders leicht, wenn man x und p durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausdrückt, und beachtet, dass $a\psi_n$, $a^*\psi_n$, $a^2\psi_n$ und $(a^*)^2\psi_n$ orthogonal zu ψ_n sind.

$$x = \frac{a + a^*}{\sqrt{2}},$$
$$p = \frac{a - a^*}{i\sqrt{2}},$$

wobei $p = -i\frac{d}{dx}$ den dimensionslosen Impuls bezeichnet. Man sieht sofort:

$$(\psi_n, x\psi_n) = 0,$$
$$(\psi_n, p\psi_n) = 0.$$

Ferner, wegen

$$x^2 = \frac{a^2 + aa^* + a^*a + (a^*)^2}{2},$$
$$p^2 = \frac{a^2 - aa^* - a^*a + (a^*)^2}{2},$$

und wegen $aa^* = a^*a + 1$, folgt unmittelbar

$$(\psi_n, x^2\psi_n) = (\psi_n, p^2\psi_n) = n + 1/2,$$

und damit ist die Unschärferelation für alle ψ_n erfüllt:

$$\Delta x \Delta p = (n + 1/2) \geq 1/2.$$

Aufgabe 19

Allgemein gilt für den Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators:

$$H = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}\left(-\frac{\hbar}{\sqrt{km}}\partial_x^2 + \frac{\sqrt{km}}{\hbar}x^2\right)$$

Bei der Skalierung $\tilde{k} = \alpha^4 k$ skalieren x und p wie folgt:

$$\tilde{x} = \alpha x \qquad \tilde{p} = p/\alpha.$$

(hiermit sind die dimensionslosen Größen gemeint). Somit erhalten wir die zu beweisende Formel für $\tilde{a}$ und außerdem die Beziehung:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x}/\alpha + i\tilde{p}\alpha) = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}\tilde{a} + \frac{1-\alpha^2}{2\alpha}\tilde{a}^* \equiv A\tilde{a} + B\tilde{a}^*. \tag{2}$$

Die alte Grundzustandswellenfunktion ψ_0 ist

$$\psi_0 = \pi^{-1/4}\exp(-x^2/2),$$

während die neue Grundzustandswellenfunktion $\tilde{\psi}_0$ gegeben ist durch

$$\tilde{\psi}_0 = \pi^{-1/4}\sqrt{\alpha}\exp(-\alpha^2 x^2/2),$$

(beide Funktionen sind auf 1 normiert). Es muß nun gelten

$$a\psi_0 = 0 = (A\tilde{a} + B\tilde{a}^*)\sum_{n=0}^{\infty} c_n\tilde{\psi}_n.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $\tilde{\psi}_n$ müssen alle Koeffizienten auf der rechten Seite verschwinden. Somit erhält man ein (unendliches) Gleichungssystem bzw. eine Rekursionsformel:

$$c_{m+1} = \frac{B}{A}\sqrt{\frac{m}{m+1}}c_{m-1},$$

und zusätzlich $c_1 = 0$ (Koeffizient vor $\tilde{\psi}_1$). Folglich verschwinden alle ungeraden c_m's. Für die geraden Koeffizienten finden wir z.B:

$$c_6 = \left(-\frac{B}{A}\right)^3\sqrt{\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}}c_0,$$

und allgemein

$$c_{2k} = \left(-\frac{B}{2A}\right)^k\sqrt{\frac{(2k)!}{(k!)^2}}c_0,$$

(alle c_m hängen noch von c_0 ab.) c_0 kann entweder bestimmt werden, indem man den Ausdruck

$$|c_0|^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{B}{2A}\right)^k \frac{(2k)!}{(k!)^2}$$

gleich 1 setzt, oder aus dem Skalarprodukt:

$$(\tilde{\psi}_0, \psi_0) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int dx\ \exp(-x^2/2 - \alpha^2 x^2/2),$$

Es ergibt sich

$$c_0 = \sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}}.$$

Auf diese Weise läßt sich also die (überraschende) Formel beweisen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(1-\alpha^2)^2}{4(1+\alpha^2)^2}\right]^k \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}.$$