UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik I

Übungsblatt 5

solutions

14. **Teilchen im Potentialtopf - mittlere Position**

Für den Erwartungswert des Ortsoperators im Zustand ψ_1 gilt offenbar

$$\langle x\rangle_{\psi_1} = \langle\psi_1|x|\psi_1\rangle = \int_{-a}^{a} x|\psi_1(x)|^2\,dx = 0$$

da die Funktion $|\psi_1(x)|^2$ gerade ist und x ungerade. Ebenso gilt auch

$$\langle x\rangle_{\psi_2} = 0$$

Für den Erwartungswert des Ortoperators im Zustand ψ_α erhalten wir mit $f = \exp(i\alpha)$:

$$\begin{aligned}\langle x\rangle_{\psi_\alpha} &= \frac{1}{2}\langle\psi_1 + f\psi_2|x|\psi_1 + f\psi_2\rangle \\ &= Re\{f\langle\psi_1|x|\psi_2\rangle\} \\ &= \langle\psi_1|x|\psi_2\rangle\cos\alpha\end{aligned}$$

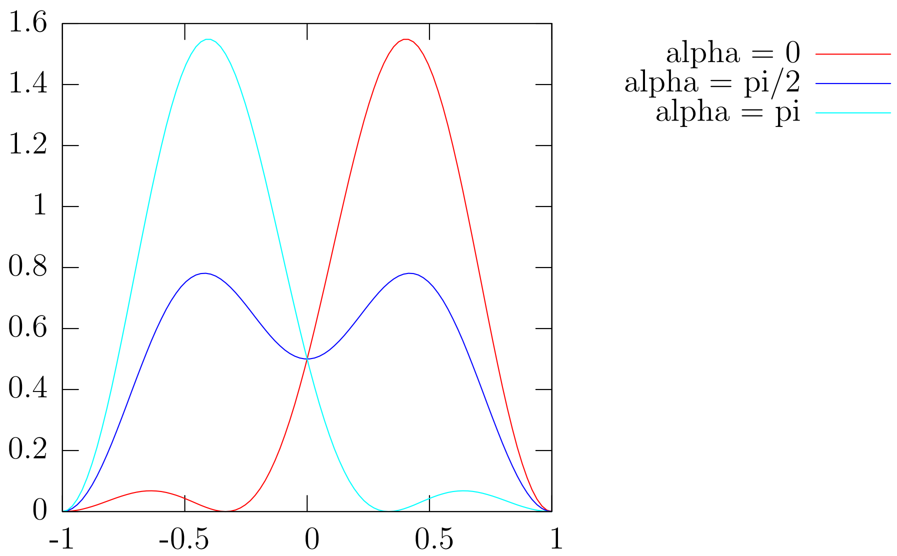
Hierbei wurden verwendet, daß $\langle\psi_1|x|\psi_1\rangle = 0 = \langle\psi_2|x|\psi_2\rangle$ gilt, x symmetrisch ist und $\langle\psi_1|x|\psi_2\rangle$ reell ist. Es bleibt dieses Matrixelement zu berechnen:

$$\begin{aligned}\langle\psi_1|x|\psi_2\rangle &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)x\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx \\ &= \frac{4a}{\pi^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(y)y\sin(2y)dy \\ &= \frac{32a}{9\pi^2}\end{aligned}$$

also

$$\langle x \rangle_{\psi_\alpha} = \frac{32a}{9\pi^2} \cos\alpha$$

Dieser Erwartungswert wird offenbar maximal für $\alpha = 0$. Dies ist auch aus der folgenden Grafik ersichtlich, in der die Wahrscheinlichkeitsdichte der Superposition, $|\psi_\alpha(x)|^2$, für verschiedene Werte von α aufgetragen ist (wobei $a = 1$ gesetzt wurde).



15. **Teilchen im Potentialtopf - andere Observablen**

Wir beginnen mit dem Erwartungswert von x^2 in den Zuständen ψ_1, ψ_2 und ψ_α:

$$\begin{aligned}
(\psi_1, x^2\psi_1) &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} x^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right) dx \\
&= \frac{1}{a}\left(\frac{2a}{\pi}\right)^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y^2 \cos^2 y \, dy \\
&= a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2}\right)
\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$(\psi_2, x^2\psi_2) = a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2}\right)$$

und schließlich mit $f = \exp(i\alpha)$

$$\begin{aligned}
(\psi_\alpha, x^2\psi_\alpha) &= \frac{1}{2}\int dx\, x^2(\psi_1 + f\psi_2)(\psi_1 + \bar{f}\psi_2) \\
&= \frac{1}{2}\left[(\psi_1, x^2\psi_1) + (\psi_2, x^2\psi_2)\right] \\
&= \frac{a^2}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2\pi^2}\right)
\end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, daß ψ_1 symmetrisch, ψ_2 antisymmetrisch ist.

Als nächstes berechnen wir den Wahrscheinlichkeitsstrom

$$J(x) = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\bar{\psi}\psi' - c.c.\right]$$

Da ψ_1 und ψ_2 reell sind, gilt offensichtlich

$$J_{\psi_1} = 0 = J_{\psi_2}$$

Für ψ_α erhalten wir

$$J_{\psi_\alpha} = (\psi_1 + \bar{f}\psi_2)(\psi_1' + f\psi_2') - c.c. = (f - \bar{f})(\psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2)$$

und somit

$$J_{\psi_\alpha}|_{x=0} = \frac{\hbar\pi}{a^2 m}\sin\alpha$$

Dieser Strom wird offenbar maximal für $\alpha = \pi/2$.

Als Erwartungswert von p^2 im Zustand ψ_1 ergibt sich

$$(\psi_1, p^2\psi_1) = (\psi_1, -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_1) = (\psi_1, \hbar^2\frac{\pi^2}{4a^2}\psi_1) = \hbar^2\frac{\pi^2}{4a^2}$$

Nun können wir die Orts-Impuls-Unschärfe für ψ_1 überprüfen:

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= 0 \\
\langle x^2 \rangle &= a^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \right) \\
\Delta x^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \;=\; a^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \right) \\
\langle p \rangle &= 0 \\
\langle p^2 \rangle &= \hbar^2 \frac{\pi^2}{4a^2} \\
\Delta p^2 &= \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \;=\; \hbar^2 \frac{\pi^2}{4a^2} \\
\text{somit} \quad \Delta x \cdot \Delta p &= \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{\pi^2}{3} - 2} \;>\; \frac{\hbar}{2}
\end{aligned}$$

Schließlich betrachten wir noch einen zeitabhängigen Winkel

$$\alpha = \frac{E_{12}}{\hbar} \cdot t$$

In Aufgabe 14 ergab sich

$$\langle x \rangle_{\psi_\alpha} \sim \cos \alpha = \cos \left(\frac{E_{12}}{\hbar} \cdot t \right)$$

somit eine Oszillation des Erwartungswerts des Orts-Operators mit der Frequenz

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{E_{12}}{\hbar} \quad \Leftrightarrow \quad E_{12} = h\nu$$

Für eine Frequenz von $\nu \geq 1\text{Hz}$ ergibt sich ein Energieunterschied von

$$E_{12} \geq 6.626 \times 10^{-34} J\,.$$

16. **Permanente Dipolmomente**

Aus der Aufgabe 11 wissen wir schon, dass die Wellenfunktionen der Bindungszustände eines symmetrischen Potentials entweder symmetrisch oder antisymmetrisch sind. Daraus folgt unmittelbar

$$|\psi_n(x)|^2 = |\psi_n(-x)|^2$$

Folglich gilt

$$(\psi_n, D\psi_n) = e \int |\psi_n(x)|^2 x dx = -e \int |\psi_n(-x)|^2 (-x) d(-x) = -(\psi_n, D\psi_n)$$

und damit die Behauptung.