UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik I

Übungsblatt 12
Solutions

33. **Teilchen im Potentialtopf mit Störung**
Der ungestörte Hamiltonoperator H_0 besitzt bekanntlich die Eigenfunktionen

$$\psi_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) & \text{für ungerade } n, \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) & \text{für gerade } n. \end{cases}$$

Die Wirkung einer beliebigen analytischen Funktion von H_0 lässt sich mit Hilfe dieser Funktionen leicht angeben. Zuerst gilt

$$f(H_0)\psi_n = f(E_n)\psi_n$$

und dann gilt wegen der Vollständigkeit des Ortonormalsystems $\{\psi_n\}$:

$$f(H_0)\psi = \sum_n f(E_n)\big(\psi_n, \psi\big)\,\psi_n.$$

Bei der Berechnung der Matrixelementen von V_I tritt nun H_0 im Exponenten auf. Wir sehen sofort, dass

$$\begin{aligned}\big(\psi_n, V_I\psi_m\big) &= \big(\psi_n, \exp[iH_0t]V\exp[-iH_0t]\psi_m\big) = \\ &= \big(\exp[-iH_0t]\psi_n, V\exp[-iH_0t]\psi_m\big) = \\ &= \big(\exp[-iE_nt]\psi_n, V\exp[-iE_mt]\psi_m\big) = \exp[i(E_n - E_m)t]\big(\psi_n, V\psi_m\big).\end{aligned}$$

Nun aber verschwindet

$$\big(\psi_n, V\psi_m\big) = \int_{-a}^{a} dx\,\overline{\psi}_n V(x)\,\psi_m$$

nur in Spezialfällen[1].

Für $V(x) = \delta(x)$ gilt offensichtlich

$$\big(\psi_n, V_I\psi_m\big) = \begin{cases} \frac{1}{a}\exp[i(E_n - E_m)t] & \text{für ungerade } n \text{ und } m, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $E_n = n^2\pi^2/8a^2$.

34. **Anregungen mit Lichtpulsen**

Wie in der Aufgabe 32 findet man

$$V_I = f(t)\sigma_1$$

Der (Wechselwirkungsbild-) Zustandsvektor kann jetzt durch

$$\psi_I = a(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

parametrisiert werden, und die Koeffizienten $a(t)$ und $b(t)$ erfüllen die Gleichungen

$$\begin{aligned} i\dot{a} &= f(t)b \\ i\dot{b} &= f(t)a. \end{aligned}$$

die auf

$$\frac{1}{f}\frac{d}{dt}\frac{1}{f}\frac{da}{dt} = -a$$

führen. Diese Gleichung lässt sich durch die Substitution $dx = f dt$, d.h.

$$x = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds,$$

einfach lösen. Es gibt zwei Lösungen:

$$\begin{aligned} a_1 &= \exp(+ix),\ b_1 = -\exp(ix), \quad \text{und} \\ a_2 &= \exp(-ix),\ b_2 = \exp(-ix). \end{aligned}$$

Um die Lösungen zu normieren müssen noch die a's und b's mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ multipliziert werden.

---

[1] Sei $V(x)$ ein Multiplikationsoperator; gäbe es nur endlich viele von Null verschiedene Matrixelemente, so müsste für $m \geq M$ gelten $(\psi_n, f(x)\psi_m) = 0$ für alle n. Nun aber ist $f(x)\psi_m(x)$ eine Funktion, und wenn die Skalarprodukte dieser Funktion mit allen Basiselementen ψ_n verschwinden, so muss die Funktion fast überall veschwinden, d.h. $f(x)\psi_m(x) = 0$ für $m \geq M$.

35. **Verschiedene Varianten des Anregungsverfahrens**
Für $f_A = \tanh(\alpha t)$ gilt

$$x_A(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{\cosh(\alpha t)}{\cosh(\alpha t_0)} \right],$$

wobei die freie additive Konstante so gewählt worden ist, dass $x_A(t = t_0) = 0$. Die lineare Kombination

$$\psi_I^A(t) = \frac{\psi_{1,I}^A + \psi_{2,I}^A}{\sqrt{2}} = \cos[x_A(t)] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - i \sin[x_A(t)] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

hat die geforderte Eigenschaft, dass sie mit dem Vektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

zu $t = t_0$ übereinstimmt.

Analog, für $f_B = \tanh(\alpha t_0)$ gilt:

$$x_B(t) = \tanh(\alpha t_0)\,(t - t_0),$$

und

$$\psi_I^B(t) = \frac{\psi_{1,I}^B + \psi_{2,I}^B}{\sqrt{2}} = \cos[x_B(t)] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - i \sin[x_B(t)] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Der Skalarprodukt

$$\Big(\psi_A(t), \psi_B(t)\Big) = \ldots = \cos[x_A(t) - x_B(t)]$$

bietet ein bedeutungsvolles Maß der Ähnlichkeit der Zustände ψ_A und ψ_B. Es ist klar, dass beide Zustände gleich sind zu $t = t_0$. Außerdem gilt (Taylor-Entwicklung)

$$x_A(t) \approx x_B(t) + \frac{\alpha}{2}(t - t_0)^2\,[1 - \tanh^2(\alpha t_0)],$$

d.h. der Unterschied zwichen ψ_A und ψ_B zeigt sich erst in zweiter Ordnung in $(t - t_0)$, und ist geringer, wenn $f(t) = x_A(t) - x_B(t)$ langsamer variiert (α kleiner). Je später t_0 gewählt wird, desto länger stimmen beide Zustände überein ($\tanh \alpha t_0 \to 1$ für $t_0 \to \infty$).