UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik I

Übungsblatt 11
Solutions

30. **Algebra der Pauli-Matrizen**
Die erste Identität ergibt sich durch eine einfache Matrixmultiplikation. Zur Berechnung von $\exp(i\alpha\vec{n}\vec{\sigma})$ beachte man, dass $\sigma_i^2 = \mathbf{1}$, und zusätzlich, dass die Exponentialfunktion im Sinne der Taylor-Reihe zu verstehen ist:
$$\exp(i\alpha\vec{n}\vec{\sigma}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\alpha\vec{n}\vec{\sigma})^k}{k!}.$$
Für gerade k's sind die Summanden Vielfache der Einheitsmatrix, während sich für ungerade k's der Faktor $i\alpha\vec{n}\vec{\sigma}$ ausklammern lässt (und das Übrige ist wieder Vielfaches der Einheitsmatrix), so dass die Behauptung unmittelbar folgt.

31. **Heisenberg-Bild**
Bei der Berechnung von
$$A(t) = \exp(iHt)\, A_0\, \exp(-iHt) = \exp(i\sigma_2 t)\, \sigma_3\, \exp(-i\sigma_2 t)$$
lohnt es sich die in der Aufgabe 30 bewiesene Formeln zu verwenden. Man findet sofort
$$A(t) = \cos(2t)\sigma_3 - \sin(2t)\sigma_1. \tag{1}$$
Anderseits kann mit dem Ansatz
$$A(t) = a(t)\sigma_1 + b(t)\sigma_2 + c(t)\sigma_3$$
der Kommutator $[H, A(t)]$ für alle t berechnet werden:
$$[H, A(t)] = -2ia(t)\sigma_3 + 2ic(t)\sigma_1$$

Wegen der Heisenberg-Gleichung muss der Kommutator gleich

$$-i\dot{a}(t)\sigma_1 - i\dot{b}(t)\sigma_2 - i\dot{c}(t)\sigma_3$$

sein. Beide Seiten der Heisenberg-Gleichung lassen sich also als Linearkombinationen der Pauli-Matrizen ausdrücken (und die Pauli-Matrizen sind linear unabhängig im linearen Raum der 2×2 Matrizen). Es folgt:

$$\dot{a} = -2c, \tag{2}$$
$$\dot{b} = 0, \tag{3}$$
$$\dot{c} = 2a, \tag{4}$$

mit der Anfangsbedingung $a(0) = 0 = b(0)$, $c(0) = 1$. Die eindeutige Lösung der Heisenberg-Gleichung lautet

$$\dot{a} = -\sin(2t), \tag{5}$$
$$\dot{b} = 0, \tag{6}$$
$$\dot{c} = \cos(2t), \tag{7}$$

und stimmt mit (1) überein.

32. **Anregungen des Zweiniveau-Systems**
Sei $\psi_0 = \psi(0)$. Durch einfaches Vorwärtsrechnen findet man

$$V_I(t) = \exp(iH_0t)\,V(t)\,\exp(-iH_0t) = D\,\sigma_1$$

wobei zu bemerken ist, dass V_I glücklicherweise zeit-unabhängig ist. Damit ist die Wechselwirkungsbild-Schrödingergleichung trivial lösbar:

$$\psi_I(t) = e^{-iD\sigma_1 t}\psi_0$$

und wegen

$$\psi(t) = e^{-iH_0 t}\psi_I(t)$$

gilt

$$\psi(t) = e^{-iH_0 t}e^{-iD\sigma_1 t}\psi_0$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür das System zur Zeit t wieder im Zustand ψ_0 zu finden ist

$$|\,(\psi_0, \psi(t))\,|^2 = \left|(\psi_0, \exp(-i\sigma_1 Dt)\psi_0)\right|^2 = \cos^2(Dt).$$

Die Anregungswahrscheinlichkeit oszilliert damit in der Zeit mit einer von D abhängigen Frequenz. Diese Oszillationen sind als Rabi-Oszillationen bekannt.