Prof. Dr. R. Verch
Falk Lindner

UNIVERSITÄT LEIPZIG

**Inst. f. Theoretische Physik**
Sommersemester 2009

---

Übungsaufgaben Kosmologie – Blatt 3

---

## 5. Kartenwechsel, Tangentenvektoren (i)

Betrachte die eingebettete Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ als 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ mit den Karten

$$U_1 = \{S^2 \backslash (0,0,1)\}, \quad \phi_1 : \mathbb{R}^3 \supset U_1 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$
$$U_2 = \{S^2 \backslash (0,0,-1)\}, \quad \phi_2 : \mathbb{R}^3 \supset U_2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right)$$

a) Berechne die Kartenwechselfunktion $\chi_{12} := \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ auf $S^2 \backslash \{0,0,\pm 1\}$.

b) Berechne den Tangentialvektor $\dot{\gamma}\big|_p \in \mathbb{R}^3$ am Punkt $p = (1,0,0) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$, wobei

$$\phi_1(\gamma(s)) = \left(1 - s^5, \sqrt{1-(1-s^5)^2}\right) \quad (-1/4 < s < 1/4)\,.$$

## 6. Tangentenvektoren (ii)

Betrachte die in den $\mathbb{R}^3$ eingebettete 2-dim. Mannigfaltigkeit "Kegel ohne Spitze",

$$\mathcal{M} = \{(y^1,y^2,y^3) \in \mathbb{R}^3 : (y^1)^2 + (y^2)^2 - (y^3)^2 = 0\,,\ y^3 > 0\}\,.$$

Als Koordinatenkarte wird eingeführt:

$$\phi(y^1,y^2,y^3) = (y^3, \arcsin(y^2/y^3))\,.$$

(a) Bestimmen Sie den maximalen Kartenbereich $\mathcal{M}_\Delta$ und den zugehörigen Bildbereich $\Delta$ unter der Bedingung, dass
$$\phi(y,0,y) = (y,0)$$
für $y > 0$ gelten soll.

(b) Bestimmen Sie für $q = (y,0,y)$ und mit $\phi = (x^\mu)_{\mu=1,2} = (x^1,x^2)$ die Basisvektoren $\partial_{x^1}$, $\partial_{x^2}$ in $T_q\mathcal{M}$.

/...2

## 7. Koordinatenabhängigkeit der partiellen Ableitung

Es sei $\mathcal{M}$ eine $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}_\Delta \xrightarrow{\phi} \Delta\,, \quad \phi = (x^\mu) \quad \text{und} \\
&\mathcal{M}_{\bar\Delta} \xrightarrow{\bar\phi} \bar\Delta\,, \quad \bar\phi = (\bar x^\mu)
\end{aligned}
$$

seien Koordinatenkarten und $v^\mu$ und $\bar v^\nu$ seien die Koordinaten-Komponentenfunktionen eines Vektorfeldes auf $\mathcal{M}$.

Es werden partielle Ableitungen der Koordinatenfunktion bzgl. der Karten definiert:

$$
\begin{aligned}
Y^\mu{}_\lambda(q) &= \frac{\partial}{\partial x^\lambda} v^\mu(\phi^{-1}(x))\big|_{x=\phi(q)}\,, \\
\bar Y^\nu{}_\rho(q) &= \frac{\partial}{\partial \bar x^\rho} \bar v^\mu(\bar\phi^{-1}(\bar x))\big|_{\bar x=\bar\phi(q)}\,,
\end{aligned}
$$

wobei $q$ im Schnitt der Kartenbereiche liege.

Stehen $Y^\mu{}_\lambda$ und $\bar Y^\nu{}_\rho$ in derselben Relation zueinander wie die Koordinaten-Komponentenfunktionen eines $\binom{1}{1}$-Tensorfelds bezüglich der Koordinaten $(x^\mu)$ und $(\bar x^\mu)$ ?