Prof. Dr. R. Verch
Falk Lindner

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Sommersemester 2009

Übungsaufgaben Kosmologie – Blatt 2

---

3. Variationen zur Hubble-Relation

(a)

Auf den Hubble Ultra Deep Field Aufnahmen kann man etwa 10.000 Galaxien bei einer Rotverschiebung $z \simeq 5$ erkennen.

Wie weit sind diese Galaxien vom irdischen Beobachter entfernt (in 10^x pc) ?

Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sie sich bzgl. des Inertialsystems des irdischen Beobachters?

(b)

Es sei $d = d(t)$ der Luminositätsabstand eines stellaren Objekts vom irdischen Beobachter, der in einem Inertialsystem (I) mit der Zeitkoordinate t ruhe.

Setzen Sie die Gültigkeit der Hubbleschen Relation

$$H_0 d = cz = c\left(\frac{\sqrt{1+\dot{d}/c}}{\sqrt{1-\dot{d}/c}} - 1\right)$$

für alle $t > 0$ voraus. $d = d(t)$ ist dann Lösung der aus dieser Relation folgenden Differentialgleichung.

Nehmen Sie an:

1. Die Lösung $d(t)$ dieser Differentialgleichung ist für alle $t > 0$ definiert und stetig differenzierbar, mit $d(t) > 0$ für alle $t > 0$.
2. Es gilt $0 < \frac{1}{c}\dot{d}(t_0) < 1$ für ein $t_0 > 0$.
3. $\dot{d}(t)$ besitzt einen (eindeutigen) Grenzwert für $t \to \infty$.

Zeigen Sie:

Es gilt $0 < \frac{1}{c}\dot{d}(t) < 1$ für alle $t > 0$, und es gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{c}\dot{d}(t) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} d(t) = \infty\,.$$

(*Bemerkung*: Man kann die Aussage auch ohne die Annahme 3. zeigen.)

4. Lorentztransformation und Rotverschiebung

Hinweis: In der folgenden Aufgabe wird die **Einsteinsche Summationskonvention** verwendet, d.h. dass bei doppelt auftretenden Indices (wobei einer ein "unterer", der andere ein "oberer" Index ist) immer gemeint ist, die Summe über die Indices zu bilden. Beispiel: $Y^\mu{}_\nu y^\nu$ bedeutet $\sum_{\nu=0}^{3} Y^\mu{}_\nu y^\nu$. Alle Indices laufen immer über 0,1,2,3.

Das (Ko-)Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes habe

bzgl. Inertialsystem (I) die Koordinatenfunktionen	$A_\mu(x)\,, \quad x = (x^\nu)$
bzgl. Inertialsystem ($\bar{\text{I}}$) die Koordinatenfunktionen	$\bar{A}_\lambda(\bar{x})\,, \quad \bar{x} = (\bar{x}^\kappa)$

Mit einer Lorentz-Tranformation $\Lambda = (\Lambda^\alpha{}_\beta)$ so, dass $\bar{x} = \Lambda x$, d.h. $\bar{x}^\kappa = \Lambda^\kappa{}_\nu x^\nu$, gilt dann

$$\bar{A}_\lambda(\bar{x}) = L^\mu{}_\lambda A_\mu(x)\,, \quad \bar{x} = \Lambda x\,,$$

wobei $L^\mu{}_\lambda$ die Komponenten der zu Λ inversen Matrix $L = \Lambda^{-1}$ sind, d.h. $L^\mu{}_\sigma \Lambda^\sigma_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ [$= 1$, wenn $\mu = \nu$, und $= 0$ in allen anderen Fällen].

(*Warnung*: Achten Sie genau auf die Stellung der Indices. Es birgt erhebliches Fehlerpotential, wenn man z.B. einfach Y^μ_ν anstelle von $Y^\mu{}_\nu$ schreibt.)

Die Lorentztransformation habe die Form

$$\Lambda = (\Lambda^\alpha{}_\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, und das elektromagnetische Potential habe bzgl. (I) die Form einer ebenen Welle mit Ausbreitungsrichtung parallel zur x^1-Achse, Frequenz ω und Wellenzahl k, also

$$A_\mu(x) = a_\mu \cos(\omega x^0 - k x^1 + \varphi_0)$$

mit rellen Konstanten a_μ und φ_0.

Zeigen Sie, dass auch $\bar{A}_\lambda(\bar{x})$ eine ebene Welle in ($\bar{\text{I}}$) mit Ausbreitungsrichtung entlang der $\bar{x}^1$-Achse beschreibt. Ermitteln Sie die Frequenz $\bar{\omega}$ dieser ebenen Welle und bestätigen Sie die Dopplereffekt-Formel für das Verhältnis $\bar{\omega}/\omega$. Bestimmen Sie auch die Bez. zwischen den Wellenzahlen k und $\bar{k}$.