UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Elektrodynamik

Übungsblatt 12

Musterlösungen

34 Aufgabe

Wir setzen, $\rho = 1 = const$, und bemerken, dass $\vec{d}$ sowie Q_{ij} proportional zu ρ sein werden. Die gefragten Momenta berechnen wir aus

$$d_i = \int d^3x\, x_i, \qquad Q_{ij} = \int d^3x\, (3x_i x_j - \delta_{ij}\, r^2).$$

(a): Mit der Notation $\overline{f} = \int d\varphi f(\varphi)$ finden wir sofort, dass $\overline{x} = \overline{y} = 0$, und damit kann nur $d_z \neq 0$ sein. Tatsächlich,

$$d_z = \int_0^h dz \int_0^R r\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, z = \frac{\pi R^2 h^2}{2}.$$

Bei der Berechnung von Q_{ij} sind die folgenden Resultate nützlich:

$$\overline{xy} = \overline{xz} = \overline{yz} = 0, \qquad \overline{\cos^2\varphi} = \overline{\sin^2\ \varphi} = \pi.$$

Wir sehen sofort, dass Q_{ij} diagonal sein muss,

$$Q_{ij} = \int_0^h dz \int_0^R r\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathrm{diag}(2x^2 - y^2 - z^2, 2y^2 - x^2 - z^2, 2z^2 - x^2 - y^2),$$

und schließlich,

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q_{zz} = \frac{\pi R^4 h}{4} - \frac{\pi R^2 h^3}{3}.$$

(b): Wie in der Teil (a) verschwinden wegen der φ-Integration die d_x und d_y. Zu d_z ergibt sich

$$d_z = \int R^2 dr \delta(r - R) \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, R\cos\theta = R^3/2.$$

Zur Q_{ij} finden wir nach der $\varphi-$Integration wieder die diagonale Form

$$Q_{ij} = \pi R^4 \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta\, \mathrm{diag}(1 - 3\cos^2\theta, 1 - 3\cos^2\theta, 2(3\cos^2\theta - 1)).$$

Nun wegen

$$\int \sin\theta (3\cos^2\theta - 1)\, d\theta = 0$$

verschwindet Q_{ij} identisch.

35 Aufgabe

Die Oberfläche eines perfekten Leiters muss äquipotential sein, d.h. $t^i \partial_i \varphi = 0$ für alle Tangentialvektoren t^i an allen Punkten der Oberfläche. Die Oberfläche zusammen mit der Ladungsverteilung ist axial-symmetrisch, und daher erwarten wir, dass das Potential φ auch axial-symmetrisch wird. Wir nehmen an, dass sich die Ladung $q = 1$ am Punkt $\vec{w}_I = (0, 0, a)$, $a > 0$, befindet, und dass die Spiegelladung tritt auf $\vec{w}_{II} = (0, 0, b)$ auf. Ohne Begrenzung der Allgemeinheit betrachten wir das Problem in der $x^2 = 0$ Ebene. Der Tangentialvektor am $\vec{x} = (x, 0, z)$ ist

$$\vec{t} = (z, 0, -x),$$

(hier nicht normiert), und steht offensichtlich senkrecht zum $\vec{x}$. Das Potential ist

$$\varphi = \varphi_I + \varphi_{II} = \frac{1}{R_1} + \frac{Q}{R_2},$$

mit $R_1 = |\vec{x} - \vec{w}_I|$ und $R_2 = |\vec{x} - \vec{w}_{II}|$. Aus der Gleichung $t^i \partial_i \varphi$ folgt

$$\frac{a}{R_1^3} = -\frac{bQ}{R_2^3}, \qquad (\star)$$

d.h., wegen $x^2 + z^2 = R^2$,

$$\left(\frac{a}{Qb}\right)^{2/3} (R^2 + b^2 - 2xb) = (R^2 + a^2 - 2xa).$$

Nun zwei lineare Funktionen von x sind gleich nur wenn die Terme bei x^1 und x^0 gleich sind. Daraus ergibt sich zunächst

$$b = Q^2 a$$

und dann

$$b^2 - b\,\frac{R^2 + a^2}{a} + R^2 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat immer zwei Lösungen, $b = a$ (triviale L.), und

$$b = \frac{R^2}{a} > 0.$$

Zusammen mit $(\star)$ finden wir schließlich

$$Q = -\frac{R}{a}.$$

Wir bemerken hier, dass der Wechselwirkung zwischen der echten Ladung und der (fiktiven) Spiegelladung kann eine effektive, anziehende Kraft

$$|F| = \frac{|Qq|}{|\vec{w}_I - \vec{w}_{II}|^2} = \frac{q^2 aR}{(R-a)^2(R+a)^2},$$

zugeordnet werden (die elektrostatische Energie fällt mit wachsenden a ab). Diese Kraft ist am $a = R$ singulär und ist der Grund für die große Austrittsarbeit der Metallen.

36 Aufgabe

Am inneren Rande von $\mathcal{V}_L$ ist das elektrische Potential constant, $\varphi|_{\mathcal{V}_L} = const = \varphi_0$. In $\mathcal{V}$ darf φ kein Maximum/Minimum besitzen, denn für eine Fläche S um ein Minimum gilt

$$\int_S \partial_i \varphi dS^i > 0,$$

was aber auch bedeuten muss, dass im Inneren von S müssen Ladungen vorhanden sein. Das Potential φ ist also konstant auf der Fläche $\partial\mathcal{V}$ (die $\mathcal{V}$ umschließest) und hat keine Maxima/Minima in $\mathcal{V}$; es folgt, dass $\varphi = \varphi_0$ in $\mathcal{V}$. Dies hat zufolge, dass das elektrische Feld $E_i = \partial_i \varphi$ in $\mathcal{V}$ verschwindet (Aufbau-Prinzip des Faradaysches Käfig).