UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Elektrodynamik

Übungsblatt 9

Musterlösungen

31 Aufgabe

Unter Verwendung der Ergebnissen der Aufgabe 29 finden wir sofort:

$$^\star F^{0i} = \frac{1}{2} \underbrace{\epsilon^{0ijk}}_{\epsilon^{ijk}} F_{jk} = B^i,$$

und

$$^\star F^{ij} = \frac{1}{2}\,\epsilon^{ijcd} F_{cd} = \epsilon^{ijk} E_k,$$

wegen $\epsilon^{ijk0} = -\epsilon^{0ijk}$, und $F_{k0} = -E_k$. Hier laufen die Indices a, b, c, d von 0 bis 3, und die i, j, k vom 1 bis 3.

(Zu (b,⇒)): Kontrahieren wir die Gleichung(en)

$$\partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab} = 0$$

mit ϵ^{abcd} so ergibt sich die gesuchte Gleichung

$$\epsilon^{abcd}(\partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab}) = 3\epsilon^{abcd}\partial_c F_{ab} = 6\,\partial_c(^\star F^{cd}) = 0.$$

(Es gilt: $\epsilon^{abcd} = \epsilon^{cdab}$.) Es sei nun t_{abc} ein in allen Indices antisymmetrischer Tensor. Es gilt

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma d}\epsilon^{dabc} t_{abc} = -6 t_{\alpha\beta\gamma}.$$

Wir schließen daraus, dass aus

$$\epsilon^{abcd}\partial_c F_{ab} = 0$$

(wegen ϵ^{abcd} lässt sich $\partial_c F_{ab}$ antisymmetrisieren) die Gleichung

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$$

folgt.

32 Aufgabe

Es sei $\varphi(x)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung, und

$$(\tau_\lambda \varphi)(x) = \varphi(x + \tau a),$$

$x, a \in \mathbb{R}^4$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Es sei zusätzlich $u = x + \lambda a$. Es gilt

$$\delta\varphi = \frac{d\tau_\lambda \varphi}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}\,\varphi(u)\bigg|_{\lambda=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^a}\,\cdot a^a,$$

und

$$\delta\mathcal{L} = \frac{d\tau_\lambda \mathcal{L}}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}\left[\mathcal{L}(\varphi(u), \tfrac{\partial vp(u)}{\partial u})\right]\bigg|_{\lambda=0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^a}\frac{du^a}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^a}\,a^a.$$

Wir wissen aber, dass für die Losungen der Bewegungsgleichung (Euler-Lagrange-Gleichung) gilt

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x^a}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,a}}\,\delta\varphi\right],$$

mit der Bezeichnung $\varphi_{,a} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^a}$. Mit den oben berechneten Variationen finden wir schließlich

$$\frac{\partial}{\partial x^a}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,a}}\,\partial_b\varphi\, a^b - \mathcal{L}\, a^a\right] = 0,$$

für alle $a \in \mathbb{R}^4$, d.h.

$$\frac{\partial T^a_b}{\partial x^a} = 0, \qquad \text{für } T^a_b = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,a}}\,\partial_b\varphi - \mathcal{L}\,\delta^a_b.$$

33 Aufgabe

Es sei

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\,\partial_a\varphi\partial^a\varphi - V(x)\varphi^2.$$

Aus der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^b}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,b}} = 0$$

mit $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} = -\partial^a\varphi$ folgt die Bewegungsgleichung

$$\partial_a\partial^a\varphi - 2V(x)\varphi = 0$$

unmittelbar. Für den T^{ab} finden wir

$$T^{ab} = -\partial^a\varphi\partial^b\varphi + \eta^{ab}[\tfrac{1}{2}\,\partial_c\varphi\partial^c\varphi + V(x)\varphi^2].$$

Dieser Tensor ist offensichtlich symmetrisch, und *nicht* spurfrei,

$$\eta_{ab}T^{ab} = \partial_a\varphi\partial^a\varphi + 4V(x)\varphi^2$$

denn in $D = 4$ Dimensionen gilt $\eta_{ab}\eta^{ab} = 4$. Der Energie-Impuls-Tensor ist nicht divergenzfrei:

$$\partial_a T^{ab} = (-\partial_a\partial^a\varphi)\partial^b\varphi - (\partial^a\varphi)(\partial_a\partial^b\varphi) + (\partial^c\varphi)(\partial^b\partial_c\varphi) + 2V(x)\varphi\,\partial^b\varphi + \varphi^2\partial^b V = \varphi^2\partial^b V,$$

wobei die Bewegungsgleichung ausgenutzt wurde. Dieses Ergebnis war auch zu erwarten, denn für $V \neq const$ ist die Largange-Dichte $\mathcal{L}$ *nicht* Translationskovariant.