

UNIVERSITÄT LEIPZIG

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Elektrodynamik

Übungsblatt 9

Musterlösungen

29 Aufgabe

(a): Wegen $A^a = (\varphi, A^i)$ gilt

$$F_{0i} = \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = E_i$$

(die letzte Gleichheit ist die Definition des elektrischen Feldes, die im Fall $\vec{A} = 0$ sich zu $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ vereinfacht). Vielmehr, wegen $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, d.h.

$$B^i = \epsilon^{ijk} \partial_j A_k$$

gilt

$$\epsilon^{ijk} F_{jk} = 2\epsilon^{ijk} \partial_j A_k = 2B^i,$$

d.h.

$$B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk},$$

was wegen $B^z = -B_z$ z.B. auf $F_{xy} = -B_z$ führt. Wir erhalten auch:

$$F_{ij} = \epsilon_{ijk} B^k.$$

(b) In Gaußschen Einheiten gilt

$$L = -\frac{mc}{2} \dot{x}_b \dot{x}^b - \frac{q}{c} \dot{x}_b A^b,$$

wobei $\dot{x}^a = \frac{dx^a}{ds}$. Bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen muss

$$\frac{dA_a}{ds} = \frac{\partial_b A_a}{\partial x^b} \dot{x}^b$$

beachtet werden. Wir erhalten

$$mc \ddot{x}_a = \frac{q}{c} (\partial_a A_b - \partial_b A_a) \dot{x}^b = \frac{q}{c} F_{ab} \dot{x}^b.$$

(c): Für $a = 0$ erhalten wir

$$mc \frac{d}{ds} \frac{dx_0}{ds} = \frac{q}{c} E_i \frac{dx^i}{ds},$$

nun wegen $c^2 dt^2 - (d\vec{x})^2 = ds^2$, d.h. $\frac{dt}{ds} = \gamma/c$, es folgt unmittelbar, dass

$$\frac{d(mc^2 \gamma)}{dt} = q E_i \frac{dx^i}{dt}.$$

Für $a = i$, $i = 1, \dots, 3$ gilt zunächst

$$mc \frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma}{c} \frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{q}{c} \left(F_{ij} \frac{dx^j}{dt} + F_{i0} \frac{dx^0}{dt} \right).$$

Wegen $F_{i0} = -E_i$, und $F_{ij} = \epsilon_{ijk} B^k$ folgt

$$\frac{d}{dt} (m\gamma v_i) = -q E_i + \frac{q}{c} \epsilon_{ijk} v^j B^k,$$

mit $v^j = \frac{dx^j}{dt}$.

(d) Wir berechnen

$$\frac{d}{ds} (\dot{x}_a \dot{x}^a) = 2\dot{x}^a \ddot{x}_a = F_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b \frac{q}{mc^2} = 0,$$

d.h. der zeitartige Charakter der Weltlinie ändert sich während der Bewegung nicht¹.

30 Aufgabe

Die Transformationseigenschaft des Faraday-Tensors F_{ab} folgt aus der Bewegungsgleichung unmittelbar. Es seien nun $\vec{B}$, $\vec{E}$ zwei Vektoren (in $\mathbb{R}^3$). Offensichtlich, O.B.d.A. kann man annehmen, dass die in der zu e_x -Richtung senkrechten Ebene liegen. Wir betrachten also $\vec{B}$, $\vec{E}$ als zwei Zweiervektoren, und postulieren das für beliebige solche Vektoren es existiert eine Drehung (der $e_y - e_z$ Ebene) nach der die Vektoren die Form

$$\vec{B} = (\cosh \psi X, -\sinh \psi Y), \quad \vec{E} = (\cosh \psi Y, \sinh \psi X) \quad (\star)$$

annehmen. Wir bemerken, dass diese Form die folgende geometrische Bedeutung hat: der Skalarprodukt $\vec{E} \cdot \vec{B} = XY$ ist fixiert (und beliebig), die Differenz der Längen $|\vec{B}|^2 - |\vec{E}|^2 = X^2 - Y^2$ ist fixiert (und beliebig), und auch die Summe der Längen $|\vec{B}|^2 + |\vec{E}|^2 = \sinh(2\psi)(X^2 + Y^2)/2$ ist fixiert (und beliebig). Damit für gegebene (X, Y, ψ) sind die Längen $|\vec{E}|$, $|\vec{B}|$ und der Winkel $\cos \theta = \vec{E} \cdot \vec{B} / (|\vec{E}| |\vec{B}|)$ eindeutig bestimmt. Mit Hilfe der Form lassen sich Paaren von Vektoren beliebiger Länge mit beliebigen Winkel zwischen den beiden Vektoren konstruieren (aber nicht alle Paaren von Vektoren – die erreicht man durch eine zusätzliche Drehung).

¹Im letzten Schritt wurde die Tatsache ausgenutzt, dass $A_{ab} S^{ab} = 0$ für einen symmetrischen Tensor S^{ab} und antisymmetrischen A_{ab} .

Es seien nun die $\vec{E}, \vec{B}$ in der Form $(\star)$ angegeben. Für eine Lorentz-Transformation in e_x -Richtung, $\vec{v} = (v, 0, 0)$, der elektromagnetischen Felder ergibt sich

$$\begin{aligned} E'^x &= E^x, & E^j &= \gamma(E^j + \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{B})^j) \\ B'^x &= B^x, & B^j &= \gamma(B^j - \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{E})^j) \end{aligned}$$

mit $j = y, z$. Man sieht sofort, dass unsere Felder Lorentz-Transformierten der Felder

$$\vec{B}' = (0, X, 0), \quad \vec{E}' = (0, Y, 0),$$

für $\cosh \psi = \gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$ sind.