UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Elektrodynamik

Übungsblatt 9

Musterlösungen

23 Aufgabe

Im ursprünglichen System, in dem die Vierervektoren k und u gegeben wurden sei $w = (c, 0)$; es gilt

$$\eta_{ab} w^a k^b = c|\vec{k}| = \frac{2\pi c}{\lambda_0},$$

und

$$\eta_{ab} u^a k^b = c|\vec{k}|\gamma \left(1 - \tfrac{v}{c} \cos\theta\right)$$

Im Ruhesystem des Beobachters gilt anderseits $u' = (c, 0)$, und mit dem Lorentz-transformierten Vektor k' gilt

$$\eta_{ab}(u')^a(k')^b = \frac{2\pi c}{\lambda_u},$$

wobei λ_u die im Ruhesystem des Beobachters erwartene Wellenlänge des Photons bezeichnet. Nun aber ist das Produkt $\eta_{ab}u^a k^b$ Lorentz-invariant, d.h.

$$\eta_{ab} u^a k^b = \eta_{ab}(u')^a(k')^b,$$

und damit finden wir sofort

$$\lambda_u = \frac{\lambda_0}{\gamma \left(1 - \tfrac{v}{c} \cos\theta\right)}.$$

24 Aufgabe

Zu (a): OBDA parametrisieren wird die lichtartige Kurve durch die Koordinate t parametrisiert, d.h. sie wird durch

$$\xi(t) = (t, x(t))$$

gegeben. Dir Kurve muss lichtartig sein, d.h.

$$\eta_{ab}\,\dot{\xi}^a\dot{\xi}^b = 1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0.$$

Es folgt $\frac{dx}{dt} = \pm 1$ und

$$\xi(t) = t \cdot (1, \pm 1),$$

d.h. die Kurve ist eine Gerade.

Zu (b): Es sei

$$\dot{\xi}^0(\tau_0) = c\,\frac{dt}{d\tau} > 0,$$

die nullte Komponente des Tangentialvektors der zeitartigen Kurve $\xi(\tau)$ am Anfangspunkt $\tau = \tau_0$. Die Kurve wird geschlossen nur wenn es einen $\tau_\sharp$ gibt, wo $\dot{\xi}^0(\tau_\sharp) = 0$ gilt. Aber am solchen Punkt muss

$$\eta_{ab}\,\dot{\xi}^a\dot{\xi}^b = -|\dot{\vec{\xi}}(\tau_\sharp)|^2 < 0,$$

d.h. die Kurve wird raumartig (was unserer Voraussetzung widerspricht).

Zu (c): Wegen der Homogenität und Isotropie von $\mathbb{R}^4$ reicht es, die Aufgabe für $x = (0, a, 0, 0)$, $y = (T, -a, 0, 0)$, zu betrachten. Es sei $\xi(t)$ eine durch

$$\xi(t) = \big(t, a\cos(\tfrac{t(2k+1)\pi}{T}), a\sin(\tfrac{t(2k+1)\pi}{T})\big), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

definierte Kurve. Für die Länge des Tangentialvektors ergibt sich

$$\eta_{ab}\,\dot{\xi}^a\dot{\xi}^b = 1 - \frac{a^2\pi^2(2k+1)^2}{T^2}.$$

(Die Länge hängt nicht von der Zeit t ab.) Es ist evident, dass zu einem gegebenen T kann immer so ein $k \in \mathbb{Z}$ gewählt werden, dass

$$\eta_{ab}\,\dot{\xi}^a\dot{\xi}^b < 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(Die Kurve wird raumartig.)

25 Aufgabe

Die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens in einem durch F^{ab} beschriebenen elektromagnetischen Feld lauten:

$$mc\,\frac{du^a}{d\tau} = \frac{e}{c}\,F^a{}_b u^b,$$

wobei $u^a = \frac{d\xi^a}{d\tau}$ die Vierergeschwindigkeit des Teilchens bezeichnet[1]. Physikalisch unterliegt ein geladenes Teilchen einer konstanten Beschleunigung in der Richtung x, wenn in seinem Ruhesystem wirkt auf das Teilchen ein von der Eigenzeit unabhängiges elektrisches Feld E in der x-Richtung. Es sei ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E} = (E, 0, 0)$ gegeben, $F^{x,0} = E$. Es lässt sich leicht verifizieren, dass obwohl das Teilchen wird sich in der x-Richtung immer schneller bewegen, wird es die gleiche Feldstärke beobachten. Tatsächlich eine Lorentztransformation des Feldes liefert

$$E^{x'} = F^{x'0'} = \Lambda^{x'}{}_a\Lambda^{0'}{}_b\,F^{ab} = E^x.$$

[1] Siehe z.B. Landau, Lifshitz *The Classical Theory of Fields*, §23 für eine Herleitung dieser Gleichung aus dem Wirkungs-Funktional.

Die Bewegungsgleichungen des Teilchens mit dem konstanten Beschleunigung sind also

$$\dot{u}^0 = \alpha u^x,$$
$$\dot{u}^x = \alpha u^0,$$

mit $\alpha = \frac{eE}{mc^2}$. Wir finden

$$u^0 = \cosh(a\tau),$$
$$u^x = \sinh(a\tau),$$

zusammen mit

$$\xi^0 = \frac{1}{\alpha}\sinh(a\tau), \qquad a^0 = \alpha\sinh(a\tau),$$
$$\xi^x = \frac{1}{\alpha}\cosh(a\tau), \qquad a^x = \alpha\cosh(a\tau),$$

Die Weltlinie, die Vierergeschwindigkeit und die Viererbeschleunigung eines konstant beschleunigten Beobachten werden durch die gefundenen Gleichungen bis auf der Wahl von α (und eventuell bis auf der Wahl einer konstanten Verschiebung $\xi^a \to \xi^a + d^a$) eindeutig bestimmt[2].

Zu (b): 𝔚ir finden zunächst:

$$\xi(t) = \Lambda(at)\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -\sinh(at) \\ \cosh(at) \end{pmatrix}$$

Nun aus der Normierung der Vierergeschwindigkeit $u^a = \frac{d\xi^a}{d\tau} = \frac{d\xi^a}{dt}\frac{dt}{d\tau}$ folgt

$$1 = y^2a^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2,$$

und damit $t = -\tau/ay$,

$$\xi(\tau) = y\begin{pmatrix} \sinh(\tau/y) \\ \cosh(\tau/y) \end{pmatrix}$$

𝔚ir erkennen, dass diese Linie der Bahnkurve eines konstant beschleunigten Teilchens mit $\alpha = 1/y$ entspricht (Teil (c) der Aufgabe).

[2]Offensichtlich hat die durch $\ddot{\xi}^0 = 0$, $\ddot{\xi}^x = a$ gegebene Linie eine andere Form. Des Weiteren, die aus dieser Gleichungen bestimmte Linie hat $\frac{d\xi^0}{dt} = \beta$, $\frac{d\xi^x}{dt} = at + v$ mit beliebigen Konstanten β, v. Die Normierungsbedingung,

$$[(\tfrac{d\xi^0}{dt})^2 - (\tfrac{d\xi^0}{dt})^2](dt/d\tau)^2 = [\beta^2 - (at+v)^2](dt/d\tau)^2 = 1$$

lässt sich für alle t nicht erfüllen (die Linie wird für $|at + v| > |\beta|$ akausal).

Zu (d): Es sei $w^a = (y\sqrt{15}, 4y)$. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} y\cosh(\tau_0/y) &= 4y^1, \\ y\sinh(\tau_0/y) &= \sqrt{15}y^1, \end{aligned}$$

folgt $y = y^1$ und $\tau_0 = y_1 \mathrm{arccosh}(4)$, sodass w^a sich als ein Ereignis auf der Weltlinie

$$\xi(\tau) = y \begin{pmatrix} \sinh(\tau/y) \\ \cosh(\tau/y) \end{pmatrix}$$

mit $y = y^1$ und zu $\tau = \tau_0$ lokalisieren lässt. Dem sich entlang dieser Weltlinie bewegenden Beobachter verläuft zwischen den Ereignissen w^a und $\tilde{w}^a = (-y\sqrt{15}, 4y)$

$$\Delta T = \frac{1}{c}\, 2\tau_0$$

seiner Eigenzeit. Anderseits dem ruhenden Beobachter (mit $u^a = (c, 0)$) verlauft zwischen den gleichen Ereignissen

$$\Delta t = \frac{1}{c}\, 2y^1\sqrt{15}$$

seiner Eigenzeit. Wir finden

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\mathrm{arccosh}(4)}{\sqrt{15}} \approx 0.53.$$

Die beschleunigte Weltlinie ist also kurzer.