UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Elektrodynamik

Übungsblatt 8

Musterlösungen

23 Aufgabe

Zur Vereinfachung werden Indizes eingeführt und nur die eigentlichen ($a = 0$) Transformationen betrachtet.
Für $\Box \circ T^* u$ finden wir

$$[\Box \circ T^* u](x) = \eta^{ab} \frac{\partial}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial x^b} u(y) = \eta^{ab} \left. \frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^A \partial y^B} \right|_{y=\Lambda x} \cdot \frac{\partial y^A}{\partial x^a} \frac{\partial y^B}{\partial x^b},$$

wobei die Matrix

$$\frac{\partial y^A}{\partial x^a} = \Lambda^A_a$$

vom Punkt unabhängig ist. Anderseits gilt

$$[T^* \circ \Box u](x) = \eta^{AB} \left. \frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^A \partial y^B} \right|_{y=\Lambda x}$$

Die Aufgabe besteht also daraus, die Gültigkeit der Formel

$$\eta^{ab} \Lambda^A_a \Lambda^B_b = \eta^{AB}, \qquad (\star)$$

zu beweisen. Per Definition, mit $y^A = (T(x))^A = \Lambda^A_a x^a$, erfüllt Λ die Gleichung

$$\eta_{AB} (\Lambda^A_a x^a) (\Lambda^B_b x^b) = \eta_{ab} x^a x^b,$$

aus der die Relation

$$\Lambda^A_a \Lambda^B_b \eta_{AB} = \eta_{ab}. \qquad (\star\star)$$

unmittelbar folgt. Es sei $\{e^A\}$, $A = 0, 1, 2, 3$ eine Menge von vier Vierervektoren mit den Komponenten $(e^A)_a = \Lambda^A_a$ (Spalten-Vektoren von Λ). Die Relation $(\star\star)$ zeigt, dass diese Menge vollständig ist; gesucht ist aber die Orthonormalität, Gl. $(\star)$. Wir betrachten das Quadrat von $(\star\star)$:

$$\eta_{ad} = \eta_{ab} \eta^{bc} \eta_{cd} = \left(\Lambda^A_a \Lambda^B_b \eta_{AB} \right) \eta^{bc} \left(\Lambda^C_c \Lambda^D_d \eta_{CD} \right).$$

Nun ist Λ per Definition bijektiv, das heißt insbesondere das ein Vektor u^a mit der Eigenschaft

$$\Lambda_a^A u^a = \delta_0^A$$

existieren muss (mit $\eta_{ad} u^a u^d = +1$). Kontrahieren wir die quadrierte Gl. ($\star\star$) mit $l^a l^d$ so ergibt sich

$$+1 = (\Lambda_b^0)\, \eta^{bc}\, (\Lambda_c^0)$$

(Relation ($\star$) für $A = 0 = B$.) Führt man die gleiche Überlegung für die weiteren drei normierten zueinander orthogonalen Vektoren k, m, n, so lässt sich die Eigenschaft ($\star$) für beliebige A, B beweisen.

24 Aufgabe

Zur Vereinfachung betrachten wir die Kugelwelle

$$u(t, \vec{x}) = \frac{\delta(t - |\vec{x}|/c)}{|\vec{x}|}$$

die der Wellengleichung

$$\Box u = 4\pi\, \delta(t)\delta(\vec{x})$$

genügt[1]. Die Distribution u lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$u(t, \vec{x}) = \frac{2\,\delta(c^2 t^2 - |\vec{x}|^2)}{c}\ \theta(t).$$

Nun wegen

$$c^2 t^2 - |\vec{x}|^2 = c^2 (t')^2 - |(\vec{x}')|^2$$

mit den aus $(t, \vec{x})$ mit Hilfe der Lorentz-Transformation gefundenen $(t, \vec{x})$, folgt, dass $u(t, \vec{x})$ dargestellt in den neuen Koordinaten $(t', \vec{x}')$ die gleiche Form hat, d.h.

$$u(t', \vec{x}') = u(T(t, \vec{x})) = \frac{2\,\delta(c^2 (t')^2 - |(\vec{x}')|^2)}{c}\ \theta(t') = \frac{\delta(t' - |\vec{x}'|/c)}{|\vec{x}'|}$$

(Bei der Transformation von $\theta(t)$ es ist wichtig, dass die Flächen $t = 0$ und $t' = 0$ den Lichtkegel $c^2 t^2 - |\vec{x}|^2 = 0$ nur am Punkt $\vec{x} = 0, t = 0$ berühren.)

In den neuen Koordinaten beschreibt also u eine Kugelwelle mit der gleichen, isotropen Ausbreitungsgeschwindigkeit.

In dem Galilei-Fall ergibt sich

$$u(T(t, x)) = \frac{2\delta\big(c^2 (t'')^2 - (x'' + vt'')^2 - (y'')^2 - (z'')^2\big)}{c}$$

[1] Die angegebene Welle, mit $u = f(t - |\vec{x}|/c)/|\vec{x}|$ ist eine Superposition der hier betrachteten Wellen, und erfüllt die WGl. $\Box u = 4\pi\, f(t)\delta(\vec{x})$.

diese Funktion beschreibt einen sich mit einer anisotropen Geschwindigkeit ausbreitenden Impuls. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit in den y'' und z'' Richtungen bleibt unverändert, während die in der x''-Richtung

$$c - v, \qquad \text{für } x'' > 0$$

und

$$c + v \qquad \text{für } x'' < 0$$

beträgt.

(Zur Wellengleichung): Allgemein gilt

$$S\Box\delta(S) = \delta'(S)\,\left[-2\,\partial_a S \partial^a S + S\,\Box S\right],$$

wobei haben wir die distributionelle Identität

$$(\delta''(S)S, f(S)) = -(\delta'(S), Sf'(S) + f(S)) = (\delta(S), 2f'(S)) = -2(\delta'(S), f(S)),$$

also

$$S \cdot \delta''(S) = -2\delta'(S)$$

ausgenutzt. Nun für

$$S_{Lorentz} = (x'')_a (x'')^a$$

verschwindet

$$[-2\,\partial_a S \partial^a S + S\,\Box S]$$

und damit ist die d'Alembert-Gleichung außerhalb vom Ursprung erfüllt. In dem Galilei-Fall verschwindet

$$[-2\,\partial_a S \partial^a S + S\,\Box S]$$

mit

$$S = S_{Galilei} = c^2(t'')^2 - (x'' + vt'')^2 - (y'')^2 - (z'')^2$$

im Allgemeinen <u>nicht</u>, und damit wird die Transformierte Funktion <u>nicht mehr</u> die d'Alembert-Gleichung erfüllen.

25 Aufgabe

Es sei

$$y^a = T^a(x), \qquad x \in \mathbb{R}^4$$

eine fest gewählte Koordinatenwechsel-Abbildung. Wir betrachten eine Familie von Geraden, deren Punkte

$$x^a = t^a \cdot \tau + u^a$$

durch den Ursprung der Gerade u^a, den Tangentialvektor t^a, und den Kurvenabstand vom Ursprung, τ, eindeutig charakterisiert sind. Das T-Bild der Geraden soll wieder Geraden beschreiben, d.h. die Punkte x^a werden auf

$$y^a = \tilde{t}^a \cdot \tau + \tilde{u}^a$$

abgebildet. Leitet man y^a nach τ ab, so ergibt sich

$$\tilde{t}^a = \frac{dy^a}{d\tau} = \frac{\partial T^a}{\partial x^b} \cdot \frac{dx^b}{d\tau} = \frac{\partial T^a}{\partial x^b} \cdot t^b,$$

und

$$0 = \frac{d^2 y^a}{d\tau^2} = \frac{\partial^2 T^a}{\partial x^b \partial x^c} \cdot t^b t^c.$$

Diese beide Gleichungen sollen für alle Geraden, insbesondere für alle t^a und u^a gelten. Es folgt

$$\frac{\partial^2 T^a}{\partial x^b \partial x^c} = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^4,$$

d.h. $\frac{\partial T^a}{\partial x^b} = B^a_b$ ist vom Punkt unabhängig und

$$y^a = B^a_b x^b + a^a,$$

mit einem geeigneten, konstanten Vektor $a^a = \tilde{u}^a - B^a_b u^b$.