UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Elektrodynamik

Übungsblatt 7

Musterlösungen

20 Aufgabe

(Zu i): Die Eigenschaften von ρ: $Spur\rho = 1$, $det\rho = 0$, $\rho^\dagger = \rho$ sind evident[1].

(Zu ii): Ganz allgemein eine 2×2 Matrix A mit $Spur A = 1$, $A^\dagger = A$ hat die Form

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + s_3 & z \\ \overline{z} & 1 - s_3 \end{pmatrix};$$

aus $detA = 0$ folgt zusätzlich $1 = s_3^2 + |\vec{z}|^2$, was mit $z = s_1 + is_2$ die notwendige Form von ρ liefert.

(Zu iii, zirk., $\Rightarrow$): Die Freiheit der Wahl von α erlaubt uns ohne Begrenzung der Allgemeinheit anzunehmen, dass

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}. \qquad (\star)$$

Tatsächlich für $\vec{\eta}e^{i\alpha} = (\vec{n} + i\vec{m})e^{i\alpha}$, mit $|\vec{n}| = |\vec{m}|$ gilt

$$\vec{\eta}e^{i\alpha} = (\vec{n}\cos\alpha - \vec{m}\sin\alpha) + i(\vec{m}\cos\alpha + \vec{n}\sin\alpha).$$

Die reelle Teil dieses Vektors liegt auf einer vom $\vec{n}$ und $\vec{m}$ augespannten Ellipse, und damit lässt sich eine beliebige Richtung von $(Re\,\vec{\eta})$ wählen (wegen $|\vec{n}| = |\vec{m}|$ stehen die reelle und imaginäre Teile von η senkrecht aufeinander – was nur im diesen Fall für alle α möglich ist). Die aus $(\star)$ gefundene Matrix ρ hat offensichtlich $\sigma_2 = \pm 1$.

(Zu iii, zirk., $\Leftarrow$): Aus $s_2 = 1$ folgt zunächst $s_1 = 0 = s_2$, und weiter

$$|\vec{g}_1|^2 = \frac{1}{2} = |\vec{g}_2|^2,$$

zusammen mit

$$g_1\overline{g}_2 = \frac{i}{2}.$$

[1] Wir verwenden den "Dagger", $\dagger$, für die Hermitsche Konjugation von Matrizen, und "Bar", $\overline{z}$, für die komplexe Konjugation der Zahl z.

Wir schließen, dass

$$g_1 = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}, \qquad g_2 = \frac{e^{i\alpha + i\pi/2}}{\sqrt{2}},$$

d.h.

$$\vec{\eta} = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

was offensichtlich einer zirkular polarisierten Welle entspricht.

(Zu iii, lin., $\Rightarrow$): Aus $\vec{\eta}_2 = 0$ (oder allgemeiner $\vec{\eta} = e^{i\alpha}\vec{w}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$) folgt, dass die Matrix ρ nur reelle Einträge hat, und damit $s_2 = 0$.

(Zu iii, lin., $\Leftarrow$): Aus $s_2 = 0$ folgt, dass $g_1 \overline{g}_2$ reell sein muss. Dies kann nur passieren, wenn $g_1 = ae^{i\alpha}$, $g_2 = be^{i\alpha}$ mit reellen Konstanten a, b, α. Diesen g_i enspricht der Vektor

$$\vec{\eta} = e^{i\alpha} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

der eine linear polarisierte Welle darstellt.

𝔈igenschaft (iv) kann durch Vorwärtsrechnen verifiziert werden. Somit stellt P eine Projektionsmatrix dar. Solche Matrizen haben nur 0 orer 1 als Eigenwerte, denn:

$$\lambda \vec{w} = P\vec{w} = P^2\vec{w} = P(P\vec{w}) = \lambda P\vec{w} = \lambda^2 \vec{w}.$$

Es sei $\vec{w}$ der Eigenvektor zum Eigenwert 1. Es folgt:

$$P\vec{\eta} = c\vec{w}, \qquad c \in \mathbb{C},$$

d.h. dem Vektor $\vec{\eta}' = P\vec{\eta}$ espricht eine linear-polarisierte Welle.

𝔐it Hilfe der Einsteinschen Summenkonvention finden wir:

$$\rho_{ab} = \frac{\eta_a \overline{\eta}_b}{\eta \overline{\eta}}, \qquad Spur(\rho P) = P^{ab} \rho_{ab},$$

wobei $\eta\overline{\eta} = \delta^{ab} \eta_a \overline{\eta}_b$. Es gilt[2]

$$I_{rel} = \frac{\eta' \overline{\eta}'}{\eta \overline{\eta}} = \frac{\delta^{ab} \eta'_a \overline{\eta}'_b}{\eta \overline{\eta}} = \frac{\delta^{ab} \, P^c_a \eta_c \, P^d_b \overline{\eta}_d}{\eta \overline{\eta}} = \frac{P^{cd} \eta_c \overline{\eta}_d}{\eta \overline{\eta}} = P^{cd} \rho_{cd} = Spur(P\rho).$$

21 Aufgabe

Für den Punktdipol aus der Kontinuitätsgleichung ergibt sich

$$j^i = \dot{d}^i \delta(\vec{x}), \qquad \rho = -d^i \partial_i \delta(\vec{x}).$$

[2] Die Intensität muss quadratisch in Feldamplituden sein, denn es handelt sich um einem Energiefluss.

Wenn die Quellen via $\vec{J}(t,\vec{x}) = e^{-i\omega t}\vec{j}(\vec{x})$ von der Zeit abhängen, dann tun es auch die retardierten Felder, z.B. $\mathcal{A}^a(t,\vec{x}) = e^{-i\omega t}A^a(\vec{x})$. Es gilt zusätzlich

$$E^i(\vec{x}) = \frac{ic}{\omega}\left(\nabla \times B(\vec{x})\right)^i,$$

wobei das Magnetfeld aus $B^i(\vec{x}) = (\nabla \times A(\vec{x}))^i$ mit

$$A^i(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3y\, j^i(\vec{y})\, \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|},$$

zu berechnen ist. $\mathfrak{I}$m unseren Fall gilt

$$\vec{J} = -\omega\sin(\omega t)\,\vec{e}\,\delta(\vec{x}),$$

$\vec{e} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e}_1$ (zur Vereinfachung haben wir die Konstante $d = 1$ gesetzt). Es gilt

$$\vec{J} = \mathrm{Im}\left[\omega e^{-i\omega t}\,\vec{e}\delta(\vec{x})\right].$$

Wir betrachten zunächst den komplexen Strom $\vec{j} = \omega e^{-i\omega t}\,\vec{e}\delta(\vec{x})$ und finden sofort

$$A^i(\vec{x}) = \frac{ke^{ikr}}{r}\,e^i,$$

wobei $k = \omega/c$ den Wellenvektor bezeichnet. Nun

$$\begin{aligned}
\partial_j A_k &= \frac{ke^{ikr}}{r}\left[ik - \frac{1}{r}\right] n_j e_k,\\
\partial_m\partial_j A_k &= \frac{ke^{ikr}}{r}\left\{\left[ik - \frac{1}{r}\right]^2 n_m n_j + \frac{1}{r^2}\,n_m n_j + \left[ik - \frac{1}{r}\right]\frac{[\delta_{mj} - n_m n_j]}{r}\right\} e_k.
\end{aligned}$$

Für die elektromagnetische Felder ergibt sich

$$B^i = \epsilon^{ijk}\partial_j A_k, \tag{1}$$

$$E^i = \frac{i}{k}\left(\delta^{ij}\delta^{mk} - \delta^{ik}\delta^{mj}\right)\partial_m\partial_j A_k. \tag{2}$$

Im Fernfeldnäherung spielen ausschließlich die als $1/r$ abfallende Terme eine Rolle. Wir finden

$$\begin{aligned}
B^i_{ff} &= ik^2\frac{e^{ikr}}{r}\epsilon^{ijk}n_j e_k,\\
E^i_{ff} &= ik^2\frac{e^{ikr}}{r}(\delta^{ij} - n^i n^j)e_j.
\end{aligned}$$

Um das Problem mit reellen Quellen (d.h. mit $\vec{J} = \mathrm{Im}\vec{j}$) zu lösen mussen die $\mathrm{Im}B^i_{ff}$ und $\mathrm{Im}E^i_{ff}$ berechnet werden; wir bezeichnen die auf diese Weise gefundenen Felder wieder mit den gleichen

Buchstaben:

$$B^i_{ff} = k^2 \frac{\cos(\omega t - kr)}{r} \epsilon^{ijk} n_j e_k,$$
$$E^i_{ff} = k^2 \frac{\cos(\omega t - kr)}{r} (\delta^{ij} - n^i n^j) e_j.$$

𝔇er Poynting-Vektor ist jetzt einfach zu bestimmen:

$$\frac{4\pi}{c} S^i = (E_{ff} \times B_{ff})^i = \frac{k^4 \cos^2(\omega t - kr)}{r^2} \left[|\vec{e}|^2 - (\vec{e} \cdot \vec{n})^2 \right] n^i.$$

(Natürlich wurde dieser Vektor quadratisch von der Amplitude des Dipols, d, abhängen.) Wie erwartet, ist der Poynting-Vektor entlang des $\vec{n} = \vec{x}/|\vec{x}|$ gerichtet.

𝔚egen

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2}, \qquad \forall t, \alpha,$$

und

$$S^i n_i = \frac{ck^4 \cos^2(\omega t - kr)}{4\pi r^2} [1 - (\vec{e} \cdot \vec{n})^2]$$

unter Berucksichtugung von

$$\int \sin\theta \, d\theta d\varphi \, [1 - (\vec{e} \cdot \vec{n})^2] = \frac{8\pi}{3}$$

finden wir

$$\overline{P} = \frac{ck^2}{3}.$$

für die mittlere abgestrahlte Leistung. Für die Winkel-abhängige Dichte des Energieflusses,

$$\overline{P}(\vec{n}) = r^2 \vec{n} \cdot \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \vec{S}(t, r\vec{n}) \, dt = \frac{ck^4}{8\pi} [1 - (\vec{n} \cdot \vec{e})^2].$$

Wenn $\theta = 0$ als die Richtung der z-Achse definiert ist, und $\varphi = 0$ als die Richtung der x-Achse, dann $(\vec{n} \cdot \vec{e}_1)^2 = \sin^2\theta \cos^2\varphi$.

22 Aufgabe

𝔉ür

$$\vec{J}(t, \vec{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\theta(\ell^2 - x_3^2) \cos(\omega t)\vec{e}, \qquad \text{mit } \vec{e} \overset{\text{def}}{=} \vec{e}_3.$$

aus der Kontinuitätsgleichung, $\partial_t \rho = -\partial_i j^i$, finden wir

$$\rho(t, \vec{x}) = -\int^t dt \, \partial_3 j^3 = \delta(x_1)\delta(x_2)[\delta(\ell - x_3) - \delta(\ell + x_3)] \, \frac{\sin(\omega t)}{\omega}.$$

Wir betrachten zunächst wieder den komplexen Strom

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\theta(\ell^2 - x_3^2) \, e^{-i\omega t} \vec{e},$$

und das von diesem Strom erzeugte Potential

$$A^i(\vec{x}) = \frac{e^{ikr} e^i}{cr} \int_{-\ell}^{\ell} dy_3 \exp[-ik\,\vec{n}\cdot\vec{y}],$$

wobei $\vec{n} = \vec{x}/r$. Die Integration ist trivial:

$$A^i(\vec{x}) = \frac{2\ell\, e^{ikr} e^i}{cr} \cdot f(u),$$

mit

$$f(u) = \frac{\sin u}{u}, \qquad u = \frac{k\ell\, x_3}{r} = k\ell\, n_3 = k\ell \cos\theta.$$

Wir finden

$$\begin{aligned}
\partial_j A_k &= \frac{2\ell}{c} \frac{e^{ikr}}{r} \left\{(ik - \tfrac{1}{r}) n_j\, f(u) + f'(u)\partial_j u\right\} e_k \\
\partial_m \partial_j A_k &= \frac{2\ell}{c} \frac{e^{ikr}}{r} \left\{ \left[(ik - \tfrac{1}{r})^2 n_m n_j + \frac{1}{r^2}\, n_m n_j + (ik - \tfrac{1}{r}) \frac{(\delta_{mj} - n_m n_j)}{r} \right] f(u) \right. \\
&\qquad \left. + f'(u)(ik - \tfrac{1}{r})(\partial_j u)\, n_m + f''(u)(\partial_m u)(\partial_j u) + f'(u)(\partial_m \partial_j u) \right\} e_k.
\end{aligned}$$

Nun wegen $u = (k\ell) n_3$ und

$$\begin{aligned}
\partial_j n_s &= \frac{1}{r}\,(\delta_{js} - n_j n_s), \\
\partial_m \partial_j n_s &= -\frac{1}{r^2}\,(n_m \delta_{js} + n_j \delta_{sm} + n_s \delta_{mj} - 3 n_m n_j n_s),
\end{aligned}$$

sind die ersten Terme in den Ausdrücken für die Ableitungen von A_k (ik bzw. $(ik)^2$) dominant für $r \to \infty$. Es folgt, dass in der Fernfeldnäherung

$$\begin{aligned}
\partial_j A_k^{ff} &= \frac{2ik\ell}{c} \frac{e^{ikr}}{r}\, n_j e_k\, f(u), \\
\partial_m \partial_j A_k^{ff} &= -\frac{2k^2\ell}{c} \frac{e^{ikr}}{r}\, n_m n_j e_k\, f(u).
\end{aligned}$$

𝔄us (1) können die Felder bestimmt werden:

$$B^i_{ff} = Re\left[\frac{2ik\ell}{c} \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{r}\, (\vec{n} \times s\vec{e})^i f(u)\right] = \frac{2k\ell}{c} \frac{\sin(\omega t - kr)}{r}\, (\vec{n} \times \vec{e})^i f(u),$$

$$E^i_{ff} = \frac{2k\ell}{c} \frac{\sin(\omega t - kr)}{r}\, [\delta^{ij} - n^i n^j] e_j f(u).$$

sodass sich

$$S^i = \frac{c}{4\pi} \left[\frac{2k\ell}{c} \frac{\sin(\omega t - kr)\, f(u)}{r}\right]^2 e^s [\delta_{js} - n_j n_s][n^i e^j - n^j e^i] = \frac{k^2\ell^2 \sin^2(\omega t - kr)\, f^2(u)}{\pi c r^2} [|\vec{e}|^2 - (\vec{e}\cdot\vec{n})^2] n^i$$

für den Poynting-Vektor ergibt. Die zur Zeit t durch die Sphäre $r = R$ transportierte Leistung ist gegeben durch

$$P(t) = \int S^i n_i \, r^2 \, \sin(\theta) d\theta d\varphi = \frac{2k^2\ell^2 \sin^2(\omega t - kR)}{c} \int_0^\pi \sin\theta d\theta [1 - \cos^2\theta] \, \frac{\sin^2(k\ell\cos\theta)}{(k\ell\cos\theta)^2}$$

Ist die Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ viel gößer als ℓ so kann man $f(u) = 1$ setzen (Dipol-Näherung) und bekommt

$$P(t) = \frac{8k^2\ell^2 \sin^2(\omega t - kR)}{3c}$$

und für die mittlere transportierte Leistung

$$\overline{P} = \frac{4k^2\ell^2}{3c}.$$

Für sehr kurze (Hochfrequenz-) Wellen ist die Leistung in der zu $\vec{e}$ senkrechten Ebene (d.h. in der $e_1 - e_2$ Ebene) fokusiert.