UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Elektrodynamik

Übungsblatt 6

Musterlösungen

17 Aufgabe

𝔄us den Maxwell-Gleichungen folgen unmittelbar die Wellengleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$:

$$\Box\vec{E} = 0 = \Box\vec{B}.$$

Offensichtlich gilt

$$\partial_a e^{-ikx} = -ik_a e^{-ikx},$$

mit $k^a = (\omega/c, \vec{k})$, $x^a = (ct, \vec{x})$ und $kx = k^a x_a = k_0 x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}$. Es folgt

$$\Box e^{-ikx} = -k_a k^a e^{-ikx} = (-\omega^2/c^2 + |\vec{k}|^2)e^{-ikx},$$

d.h.

$$|\vec{k}^2| = \omega^2/c^2.$$

Aus der Gleichung

$$(\nabla \times E)^i = -\frac{1}{c}\,\partial_t B^i$$

folgt für unsere ebene Wellen

$$\vec{k}\times\vec{E}_0 = \frac{\omega}{c}\,\vec{B}_0,$$

und entsprechend

$$\vec{k}\times\vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c}\,\vec{E}_0,$$

aus der Gleichung für $\vec{\nabla}\times\vec{B}$. Aus den Divergenz-Gleichungen erhielt man

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0 = \vec{k}\cdot\vec{B}_0.$$

Zu (e) nehmen wir an, dass die Normen der Vektoren $\vec{k}, \vec{E}_0, \vec{B}_0$ ungleich Null sind. Aus $\vec{k}\times\vec{E}_0 = \frac{\omega}{c}\,\vec{B}_0$ folgt zunächst, dass $\vec{E}_0\cdot\vec{B}_0 = 0$ (d.h. das elektrische Feld und das Magnetfeld sind zueinander orthogonal). Es folgt, dass die drei Vektoren linear unabhängig sein müssen. Wir wissen auch, dass $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$ orthogonal zu $\vec{k}$ sind, und schließen daraus die drei Vektoren eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}$ bilden. Aus $\vec{k}, \vec{E}_0, \vec{B}_0$ folgt dass die Basis $\{\vec{k}, \vec{E}_0, \vec{B}_0\}$ positiv orientiert ist. Wegen $\vec{k}| = \omega/c$, und $\vec{k}\cdot\vec{E}_0$ folgt aus

$$|\vec{k}\times\vec{E}_0| = \frac{\omega}{c}\,|\vec{B}_0|$$

dass $|\vec{E}_0| = |\vec{B}_0|$.

Zu (ii): jede Funktion $f(u)$ die nur von $u = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}$ abhängt beschreibt einen sich in der Raumzeit in $\vec{k}$-Richtung ausbreitenden Profil. Hätte $f(u)$ ein Maximum bei $u = 0$, so ist zu einer festen Zeit t das Profil $f(u)$ maximal auf der zu $\vec{k}$ senkrechten Ebene $\vec{x}\cdot\vec{k} = const = \omega t$ (die Ebene der konstanten Phase). In der Zeit bewegt sich diese Ebene in der $\vec{k}$-Richtung mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = c\vec{k}/|\vec{k}|$. In der ersten Teil der Aufgabe wurde gezeigt, dass die Amplituden $\vec{E}_0$ und B_0 tatsächlich parallel zu der Ebene der konstanten Phase also senkrecht zu $\vec{k}$ sind (die Welle ist Transversal).

18 Aufgabe

Es seien $G^{\pm}(x,y)$ die Greenschen Funktionen

$$G^{\pm}(x,y) = \frac{\delta(t - s \pm \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c})}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|},$$

des Wellen-Operators (d'Alembert-Operators), wobei $x^a = (t,\vec{x}), y^a = (s,\vec{y})$). Die Lösungen der inhomogenen Wellengleichung lassen sich immer mit Hilfe der Faltung der Quellen mit den Greenschen Funktionen finden. Die Distributionen

$$\xi^{\pm}(x) = \int d^4y\, G^{\pm}(x,y)\, j(y)$$

sind Lösungen der Gleichung

$$\Box_x \xi^{\pm}(x) = j(y).$$

In unserem Fall, $j(x) = 4\pi\delta(\vec{x})f(t)$, gilt

$$\xi^{\pm}(t,\vec{x}) = \int dt'\, d^3y\, \frac{\delta(t - t' \pm \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c})\,\delta(\vec{y})f(t')}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \int dt'\, \frac{\delta(t-t' \pm \frac{|\vec{x}|}{c})}{|\vec{x}|}\, f(t') = \frac{f(t \pm |\vec{x}|/c)}{|\vec{x}|}.$$

Die Bedeutung dieser Lösungen kann wie in der Aufgabe 17 erläutert werden: hätte $f(u)$ ein Maximum bei $u = 0$ so liegt zu einer festen Zeit t das Maximum der Verteilung $f(u^-)$, $u^- = t - |\vec{x}|/c$ auf der Oberfläche der Sphäre $|\vec{x}| = ct$. Für wachsende t bewegt sich die Maximum-Fläche auswärts (für $u^+ = t + |\vec{x}|/c$ inwärts).

19 Aufgabe

Ʒur Vereinfachung betrachten wir zunächst eine Verteilung von "Punktquellen", d.h.

$$j^a(x) = \sum_i w_i^a \, \delta(x - y_i),$$

wobei x, y_i, w Vierervektoren bezeichnen, der Index i die Quellen nummeriert, und $w^a = q_i v_i^a$ mit $q_i =$ die Ladung und v^a die Vierergeschwindigkeit der i-en Quelle bezeichnen. Als die Felder durch Ableitungen von den Potentialen definiert sind, werden sie zumindest in den Regionen verschwinden, wo auch die Potentiale es tun. Es gilt

$$A_a^{ret}(x) = \sum_i w_i^a G^{ret}(x, y_i).$$

Offensichtlich wegen der Trägereigenschaften von $G^{ret}(x, y)$ verschwindet

$$w^a G^{ret}(x, y)$$

für $x \notin V^+(y)$. Folglich muss $A_a^{ret}(x)$ (und damit auch die Felder $\vec{E}(x)$, $\vec{B}(x)$) für $x \notin V^+(S)$ verschwinden, mit $S = \cup_{y_i} V^+(y_i)$. Eine Verallgemeinerung auf kontinuierliche Ladungsverteilungen liefert die gesuchte Aussage.

Zu (b): Das Potential $\phi_C(x)$ (in der Coulomb-Eichung) erfüllt die Poisson-Gleichung. Die Lösungen $\phi(t, \vec{x})$ (überall auf der Fläche $t = const$) hängen nur von der Ladungsdichte auf der selben Fläche ($t = const$):

$$\varphi(t, \vec{x}) = \int d^3y \, \frac{\rho(t, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}.$$

Die elektromagnetische Felder, $\vec{E}(x)$ und $\vec{B}(x)$ sind von der Eichung der Potentiale unabhängig. Es muss also möglich sein eine solche Lösung der partiellen Differentialgleichung für $\vec{A}_C$ zu wählen, dass die aus $\phi_C(x)$ und $\vec{A}_C(x)$ ausgerechneten Feldern die kausale Ausbreitungseigenschaft besitzen. Offensichtlich nicht für jedes $\vec{A}_C(x)$ wird das passieren, denn die retardierten Felder, $\vec{E}^{ret}$, $\vec{B}^{ret}$ nicht die einzige Lösungen der inhomogenen Maxwell-Gleichungen sind (man kann, z.B. noch beliebige freie wellenartige Lösungen addieren). Speziell kann man die kausalen Lorentz-Potentiale A^a umeichen, sodass:

$$A_C^i = A_L^i + \partial^i \Lambda$$

wobei aus $\partial_i A_C^i = 0$ folgt die Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \Lambda = -\partial_i A_L^i,$$

aus der die Funktion $\Lambda(t, \vec{x})$ eindeutig bestimmt werden kann. Das auf diese Weise gefundene Potential A_C^i Coulomb-Eichung garantiert das kausale Verhalten der Felder. Es hat, genauso wie das skalare Potential ϕ_C, keinen kompakten Träger auf den Flächen $t = const$.