UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Elektrodynamik

Übungsblatt 5

Musterlösungen

13 Aufgabe

(a) Der Ausgangspunkt für diese Aufgabe sind die Maxwell-Gleichungen

$$\partial_a(\partial^a A^b - \partial^b A^a) = \frac{4\pi}{c}\, j^b, \tag{1}$$

wobei $j^0 = c\rho$, zusammen mit

$$E^i = \partial^0 A^i - \partial^i A^0, \qquad B^i = (\nabla \times A)^i.$$

Unter Annahme der temporalen (Weyl-) Eichung, $A^0 = \varphi = 0$, gelten die folgenden vier Differentialgleichungen

$$-\frac{1}{c}\,\partial_t(\partial_i A^i) = 4\pi\rho,$$

$$\Box A^i = \frac{4\pi}{c}\, j^i - \partial^i(\partial_j A^j),$$

aus den die drei Funktionen $A^i(t,\vec{x})$ bestimmt werden sollen. Es sei

$$A^i = \partial^i g + (\nabla \times v)^i$$

die Helmholtz-Zerlegung von A^i. Die erste Differentialgleichung lässt sich immer integrieren

$$(\partial_i A^i)(t,\vec{x}) = -4\pi c \int_0^t \rho(\tau,\vec{x})\, d\tau + w(\vec{x}) \equiv w_0(t,\vec{x}) + w(\vec{x}),$$

wobei die Integrationskonstante, die Funktion $w(\vec{x})$, beliebig sein darf. Die Differentialgleichung für $\vec{A}$ hat jetzt die Form einer Wellengleichung

$$\Box A^i(t,\vec{x}) = \frac{4\pi}{c}\, j^i(t,\vec{x}) - \partial^i[\omega_0(t,\vec{x}) + \vec{w}(\vec{x})],$$

wobei die auf der rechten Seite auftretende Quellen bis auf den Term $\partial^i w(\vec{x})$ schon bestimmt sind.

Die temporale (Weyl-) Eichbedingung liegt also das Vierer-Potential nicht eindeutig fest (man sagt: die Eichbedingung ist unvollständig); bei einer Umeichung

$$\vec{A}(t,\vec{x}) \to \vec{A}(t,\vec{x}) + \vec{\nabla} w(\vec{x})$$

bleiben die Elektromagnetische Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$ und auch die Eichbedingung $\varphi = 0$ unverändert. Man sieht auch, dass

$$\Box \text{ rot } A^i(t, \vec{x}) = \frac{4\pi}{c} \text{ rot } j^i(t, \vec{x}),$$

sodass nur das Vektorfeld $\vec{v}$ in der Helmholtz-Zerlegung von $\vec{A}(t, \vec{x})$ eindeutig ist.
(b-i) $\mathfrak{E}$s gilt allgemein

$$\mathcal{A}_{\Lambda a} = A_a + \partial_a \Lambda. \tag{2}$$

Das Potential $\mathcal{A}_\Lambda$ wird die Coulomb-Eichbedingung, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\Lambda = 0$ genügen, wenn

$$\nabla^2 \Lambda(t, \vec{x}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}).$$

Diese Gleichung erlaubt uns die Eichfunktion $\Lambda(t, \vec{x})$ bis auf eine Lösung der Laplace-Gleichung eindeutig zu bestimmen. Aus der Gleichung (2) mit dem früher gewonnenen $\Lambda(t, \vec{x})$ kann schließlich das neue Potential, $\mathcal{A}_\Lambda$, ermittelt werden.
(b-ii) Die Weyl-Bedingung

$$\varphi_\Lambda = 0$$

wird dann erfüllt, wenn

$$\tfrac{1}{c} \partial_t \Lambda(t, \vec{x}) = -\varphi(t, \vec{x}).$$

Wie im Teil (a) kann diese Gleichung immer integriert werden, und die Lösung, $\Lambda(t, \vec{x})$ ist bis auf eine zeitunabhängige Funktion $w(\vec{x})$ eindeutig. Das neue Potential, $\mathcal{A}_\Lambda$, kann wieder aus (2) berechnet werden.
(b-iii) $\mathfrak{D}$ie in der Teil (b) ermittelten Bedingungen für $\Lambda(t, \vec{x})$ haben die Form der Differentialgleichungen (Gewöhnliche DGl. im Fall der Weyl-Eichung und die Poisson-Gleichung im Fall der Coulomb-Eichung). Wenn diese Gleichungen gelöst werden können, dann ist eine Umeichung immer möglich, zumindest im Sinne von Distributionen: die Differentiation in der Gl. (2) kann für Distributionen immer durchgeführt werden. Die Theorie der (gewöhnlichen und partiellen) Differentialgleichungen beschäftigt sich u.a. mit den Problemen der Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen mit singulären Quellen. Im Allgemein muss präzis definiert werden zu welcher Funktionenfamilie soll die gesuchte Lösung $\Lambda(t, \vec{x})$ gehören.

$\mathfrak{F}$ormal die hinreichende Bedingungen für die Existenz von den Lösungen liefern Bedingungen für die Divergenz des Lorentz-Vektorpotentials $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_L$ und für das skalare Lorentz-Potential φ_L. Es ist (uns) unklar ob diese Bedingungen durch Bedingungen auf $(\rho, \vec{j})$ ersetzt werden können. Die folgende Tatsache muss berücksichtigt werden: die Lorentz-Eichung ist ebenso wie die Weyl-Eichung unvollständig: genügt ein Potential A die Lorentz-Bedingung,

$$\partial_a A^a = 0,$$

so tut es auch das Potential $A^a_\Lambda = A^a + \partial^a \Lambda$, wenn die Eichfunktion Λ die Wellengleichung

$$\Box \Lambda = 0$$

erfüllt. Es existieren singuläre und auch im Unendlichen nicht-verschwindende Lösungen der homogenen Wellengleichung $\Box\Lambda = 0$, und damit – sogar wenn keine Strome/Ladungsdichten vorhanden sind existieren singuläre oder im Unendlich nicht-verschindende Lorentz-Potentiale $\mathcal{A}_L$. Solche Potentiale können vermutlich beliebige für die Existenz der Lösungen in (b) notwendige Bedingungen verletzen, und damit ist es unklar, ob die Existenz einer Lorentz→Coulomb Umeichung nur von den Stome/Ladungsdichten abhängt.

14 Aufgabe

𝔚ir bestimmen zunächst die retardierten/avancierten Fundamentallösungen der d'Alembert-Gleichung:

$$\Box G^{\pm}(x, y) = \delta(x^a - y^a).$$

Mit

$$G^{\pm}(x) = \int e^{ikx} f(k) d^4k, \qquad \delta(x^a - y^a) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ik(x-y)} f(k) d^4k,$$

wobei $kx = k_a x^a = k_0 x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x}$, folgt

$$f(k) = -\frac{e^{-iky}}{(2\pi)^4 k^2}$$

(hier $k^2 = (k_0)^2 - \vec{k} \cdot \vec{k}$). Um $G^{\pm}$ zu berechnen muss die Struktur der Singularitäten von $f(k)$ spezifiziert werden:

$$G^{\pm}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int dk_0 \int d^3k \frac{e^{ik^0(x^a - y^0)}}{(k^0 - |\vec{k}| \mp i\epsilon)(k^0 - |\vec{k}| \mp i\epsilon)}\, e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})},$$

(die Distribution ist definiert als $\epsilon \to 0$).

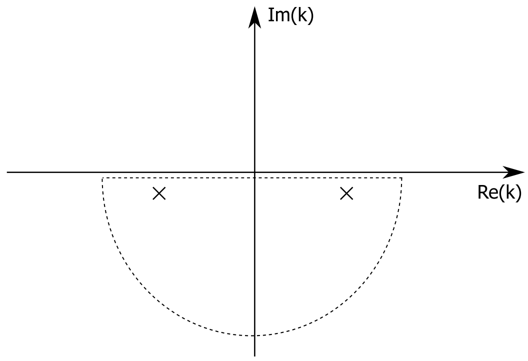

Abbildung 1: Die k_0-Integrationskontur und die Polstellen von $f(k_0, \vec{k})$ für G^-.

𝔉ür G^- wird die Kontur unter der reellen Achse (im negativen Richtung) abgeschlossen, und wir erhalten aus dem Residuensatz:

$$G^{-}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k\, e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \left[\frac{e^{i|\vec{k}|(x^0-y^0)}}{2|\vec{k}|} + \frac{e^{-i|\vec{k}|(x^0-y^0)}}{-2|\vec{k}|} \right] \theta(x^0-y^0).$$

In den Kugelkoordinaten (bzg. $\vec{k}$) sind die φ und θ-Integrationen trivial. Wir erhalten:

$$G^{-}(x) = \frac{1}{4\pi r}[\delta(r-d) - \delta(r+d)]\theta(d),$$

wobei $d = x^0 - y^0$, und $r = |\vec{x}-\vec{y}|$. Es folgt

$$G^{-}(x) = \frac{1}{4\pi r}\, \delta(r-d).$$

(d ist automatisch positiv.)

Für G^{+} muss die Kontur über der reellen Achse (im positiven Richtung) abgeschlossen werden, sodass schließlich

$$G^{\pm}(x,y) = \frac{\delta[|\vec{x}-\vec{y}| \pm (x^0-y^0)]}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}.$$

Es ist nun automatisch, dass die Distributionen

$$u^{\pm} = \int d^4y\, G^{\pm}(x,y)\, f(y^0,\vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\delta[|\vec{x}-\vec{y}| - c(t-t')]\, f(t',\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, d^3y\, (c\, dt')$$

Lösungen der inhomogenen Gleichung

$$\Box y^{\pm}(x) = f(x)$$

darstellen (hier $x^0 = ct$, $y^0 = ct'$, und $\delta(cx) = \frac{1}{c}\delta(x)$).

15 Aufgabe

(a) Aus der Gleichung (1) mit $\partial_i A^i = 0$ $(i = 1,2,3)$ folgen unmittelbar

$$-\nabla^2\varphi(t,\vec{x}) = 4\pi\rho(t,\vec{x}), \tag{3}$$

$$\Box A^i(t,\vec{x}) = \frac{4\pi}{c}\, j^i(t,\vec{x}) + \frac{1}{c}\, \partial^i\partial_t\varphi(t,\vec{x}). \tag{4}$$

(b) Im allgemeinen Fall sind die Lösungen dieser Gleichungen mit Hilfe der Greenschen Funktionen zu bestimmen. Zunächst

$$\varphi(t,\vec{x}) = \int d^3y \frac{\rho(t,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

(die Gleichung für $\varphi(t,\vec{x})$ ist vom Poisson-Typ). Mit dem gefundenen $\varphi(t,\vec{x})$ kann auch die Wellengleichung für $A^i(t,\vec{x})$ mit Hilfe der retardierten Greenschen Funktion gelöst werden:

$$A^i(t,\vec{x}) = \int d^3y\, \frac{W^i(t',\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|},$$

wobei $t' = t - |\vec{x}-\vec{y}|/c$, und

$$W^i(t,\vec{x}) = \frac{1}{c}\left[j^i(t,\vec{x}) + \frac{1}{4\pi}\,\partial^i\partial_t\varphi(t,\vec{x})\right].$$

(c,d) 𝔙om konzeptionellen Standpunkt gibt es in der Berechnung des Strahlungsfeldes zwischen den Coulomb- und Lorentz-Eichungen kein Unterschied (zur Bestimmung von elektromagnetischen Feldern müssen Wellengleichungen gelöst werden). Wir betrachten also das Problem in Lorentz-Eichung. Zur Vereinfachung betrachten wir das Feld einer oszillierenden Punktladung[1]. Im solchen Fall sind die fölgenden Wellengleichungen zu lösen:

$$\Box A^a(t,\vec{x}) = \frac{4\pi}{c} j^a(t,\vec{x}),$$

wobei $A^a = (\varphi, \vec{A})$, und

$$j^a(t,\vec{x}) = \frac{1}{c}\,\delta[\vec{x}-\vec{\xi}(t)]\,\frac{d\xi^a}{dt},$$

die vierer-Ladungsdichte einer Punktladung beschreibt. Die Weltlinie des Teilchens ist durch $\xi^a(t) = (ct, \xi^i(t))$ gegeben.

𝔐it Hilfe der Retardierten Lösungen der Wellengleichung finden wir

$$A^a(t,\vec{x}) = \int dt'\, d^3y\, \frac{\delta(t'-t+\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, j^a(t',\vec{y}),$$

Integriert man zunächst über d^3y, und danach über t' so erhielt man

$$A^a(t,\vec{x}) = \frac{v^a(t')}{R_0 v_0 - \vec{R}\cdot\vec{v}}, \tag{5}$$

wobei

$$R^i(t') = x^i - \xi^i(t'), \quad R^0 = c|\vec{R}| = cR,$$

und $\vec{v}^i = d\xi^i/dt'$, $v_0 = c$.

Wir bemerken, dass die Relation (Definition der retardierten Zeit, die durch den δ-Term hervorgerufen ist)

$$c(t-t') = |\vec{x}-\vec{\xi}(t')| = R$$

[1]Das Feld einer oszillierenden Kugel ist formal durch Superposition der Punktladungsfelder gegeben; wir halten es für wahrscheinlich, dass für Beobachtungsstellen die weit vom System entfernt sind wird das hier gefundene Strahlungsfeld dem tatsächlichen Feld einer oszillierenden Kugel sich nähern.

die retardieren Zeit t' implizit (aber eindeutig!) definiert. Genauer gesagt: zu jedem Raumzeit-(Beobachtungs)-Punkt $(t, \vec{x})$ existiert genau eine t' sodass die obere Gleichung erfüllt ist.

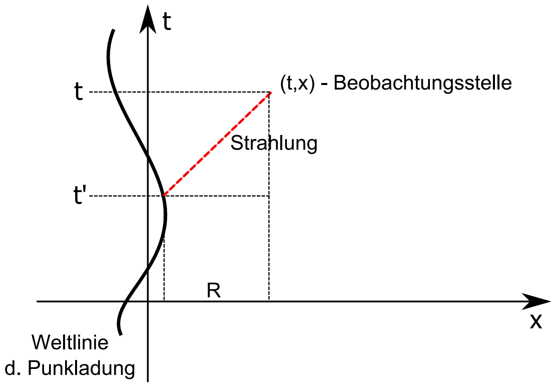

Abbildung 2: Die retardierte Zeit ist eine eindeutige (jedoch implizite) Funktion von $(t, \vec{x})$.

In unserer Situation, und auch im Allgemeinen, kann diese Gleichung nicht explizit gelöst werden. Die Lösungen (für t', aber auch für $A^a(t, \vec{x})$ und $E^i(t, \vec{x})$, $B^i(t, \vec{x})$) werden immer implizit (in den gefundenen Feldern wird t' auftreten). Unter bestimmten Annahmen wird es möglich approximative Lösungen explizit, z.B. weit vom Quellen, zu bestimmen.

Um die Felder zu Bestimmen müssen die Potentiale bzgl. t und $\vec{x}$ differenziert werden, denn

$$F_{ab}(t, \vec{x}) = \frac{\partial A_b}{\partial x^a} - \frac{\partial A_a}{\partial x^b}.$$

Um in unserer impliziten Situation diese partiellen Ableitungen berechnen zu können bestimmen wir zunächst $\partial_t(t')$, und $\partial_i(t')$, denn, als wir schon bemerkt hatten, ist t' eine eindeutige Funktion von t und $\vec{x}$. Aus der bzgl. t oder x^i abgeleiteten Definition der retardierten Zeit t' finden wir

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{cR}{cR + R_j v^j} = \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{v}/c},$$

$$c\frac{\partial t'}{\partial x^i} = \frac{cR_i}{cR + R_j v^j} = \frac{n_i}{1 - \vec{n} \cdot \vec{v}/c},$$

mit $\vec{n} = \vec{R}/R$, oder auch

$$\frac{\partial t'}{\partial x^a} = \frac{R_a}{R_a v^a},$$

wobei $v^a = (c, v^i)$. Wir bemerken, dass im Limit $\vec{v} \to \vec{n} \cdot c$ der Nenner in diesen Ableitungen verschwindet, d.h. allgemein wenn die Quellen sich mit Geschwindigkeit $v \approx c$ bewegen, dann wird das abgestrahlte Feld besonders in der Bewegungsrichtung verstärkt.

Mit

$$\frac{\partial R^a}{\partial x^b} = \delta^a_b - \frac{v^a v_b}{Rv},$$

wobei $Rv = R_a v^a$ finden wir schließlich

$$F_{ab}(t, \vec{x}) = \frac{R^{[a}\dot{v}^{b]}}{(Rv)^2} + \frac{R^{[a}v^{b]}}{(Rv)^3}\left\{v^2 - (R\dot{v})\right\}.$$

Hier wurde die Notation $T_{[ab]} = T_{ab} - T_{ba}$ für den antisymmetrischen Anteil eines Tensors verwendet, und $v^2 = v_a v^a$, $R\dot{v} = R_a \frac{dv^a}{dt'}$.

Wir bemerken, dass (wie schon angesagt wurde) alle hier auftretende Symbole sind Funktionen der retardierten Ziet t', d.h. z.B. $\gamma = \gamma(t')$, $R = R(t')$ usw.; alle sind als implizite Funktionen von $(t, \vec{x})$ zu verstehen.

16 Aufgabe

Zur Vereinfachung nehmen wir $\kappa = 1$. Da das vorgegebene Vektorfeld "radial" ist, mit

$$|\vec{R}(\vec{x})| = \frac{1}{r^2},$$

schließen wir, dass es sich hier um ein Coulomb-Feld (Gradientenfeld)

$$R_i(\vec{x}) = -\partial_i(1/r),$$

$r = |\vec{x}|$ handelt. Wir wissen, dass

$$-\nabla^2(1/r) = 4\pi\delta(\vec{x}),$$

und damit verschwindet die Divergenz von $\vec{R}$ im U.

Die Frage ist nun: gibt es vielleicht auch einen Vektorfeld A, sodass

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{R}$$

im U? Hätte man $\vec{R}$ als das Magnetfeld $\vec{B}$ angesehen, so ist unsere Frage äquivalent zur Suche nach einem Vektorpotential des Magnetfeldes eines magnetischen Dipols. Das Argument dafür dass es keinen solchen (regulären) Vektorpotential gibt läuft wie folgt: wir nehmen an, dass ein reguläres Potential $\vec{A}$ existiert, und betrachten Kreise, $\mathcal{C}(\Theta)$, definiert durch: $\theta \leqslant \Theta$, auf der Oberfläche der Sphäre $|\vec{x}| = 1$. Es gilt

$$\int_{\partial\mathcal{C}} A_i dx^i = \int_{\mathcal{C}} R_i n^i \, dS = 2\pi \int_0^{\Theta} \sin(\theta) \, d\theta = 2\pi(1 - \cos\Theta).$$

Der Umfang von $\mathcal{C}(\Theta)$ ist $2\pi \sin\Theta$; wäre A_i überall auf der Sphäre regular, so musste $\int_{\partial\mathcal{C}} A_i dx^i \to 0$ für $\Theta \to 0$ und für $\Theta \to \pi$. Wir sehen aber, dass das nicht möglich ist, denn $\int_{\partial\mathcal{C}} A_i dx^i \to 2$ für $\Theta \to \pi$. Es folgt, dass das Potential eines magnetischen Monopols muss zumindest entlang einer sich vom Ursprung bis ∞ erstreckenden Halblinie singulär sein.

Solche Potentiale gibt es auch tatsächlich, z.B.:

$$A_\varphi = 1 - \cos\theta, \quad A_r = 0 = A_\theta$$

(singulär entlang $\theta = \pi$), oder

$$\tilde{A}_\varphi = -1 - \cos\theta, \quad \tilde{A}_r = 0 = \tilde{A}_\theta$$

(singulär entlang $\theta = 0$), haben die Eigenschaft

$$\text{rot}\, A = \frac{\vec{x}}{r^3} = \text{ rot}\, \tilde{A},$$

im U (sogar im $\mathbb{R}^3$) ohne der singulären Linien.