

UNIVERSITÄT LEIPZIG

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Elektrodynamik

Übungsblatt 4

Musterlösungen

10 Aufgabe

Aus der Aufgabe 8 wissen wir, dass das Magnetfeld eines unendlichen Drahtes, $\vec{j} = J\vec{e}_2\delta(x_1)\delta(x_3)$ immer axial ist, d.h. die φ -Komponente des Vektorfeldes B_a ist

$$B_\varphi = \frac{2J}{c}.$$

Die Länge dieses Vektors ist

$$|\vec{B}(\vec{x})| = \sqrt{g^{ab}B_aB_b} = \frac{2J}{cr},$$

wobei $r = \sqrt{(x_1)^2 + (x_3)^2}$ den Abstand zwischen dem Punkt $\vec{x}$ und dem Draht bezeichnet.

Aus der Faradayschen Gleichung,

$$(\nabla \times E)^i = -\frac{1}{c} \frac{\partial B^i}{\partial t}$$

folgt die in der Aufgabenstellung angegebene Formel

$$U \equiv \int_{\partial S} E_i dx^i = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_S B_i n^i dS \right),$$

für eine Fläche S mit dem positiv orientierten Rand ∂S .

Die Leiterschleife Γ_2 befindet sich in der $x_1 - x_2$ Ebene. Das zur Zeit t existierende Magnetfeld $\vec{B}$, das von dem Draht Γ_1 erzeugt wurde, steht immer senkrecht zu Γ_2 . Wir finden¹

$$\int_S B_i n^i dS = - \int_0^{\ell_2} dy \int_0^{\ell_1} \frac{2J(t)}{c(x_0 + vt + x)} dx = -\frac{2J(t)\ell_2}{c} \cdot \ln \left(1 + \frac{\ell_1}{x_0 + vt} \right),$$

wobei wurde angenommen, dass der Abstand zwischen dem Draht Γ_1 und der linken Kante von Γ_2 zur Zeit t

$$x_0 + vt$$

¹Das Magnetfeld $\vec{B}$ ist antiparallel zu $\vec{n}$.

beträgt. Mit $J(t) = J_0 \cos(\omega t)$ finden wir

$$U = \frac{2\ell_2 J_0}{c^2} \partial_t \left[\cos(\omega t) \ln \left(1 + \frac{\ell_1}{x_0 + vt} \right) \right].$$

11 Aufgabe

Einfache Überlegungen zeigen, dass aus der Annahme $\partial_z \vec{B} = 0$ folgt: zunächst dass die radiale Komponente verschwindet², $B_r = 0$, und dann dass die z -Komponente konstant sein muss³, $B_z = \text{const.}$ Aus dem Schleifenintegral über $r = \text{const.}$, $z = \text{const.}$ ergibt sich für B_φ :

$$\int B_i dx^i = 2\pi B_\varphi(r) = \frac{4\pi}{c} \int_0^r r dr \int_0^{2\pi} d\varphi j_z(r),$$

d.h.

$$B_\varphi(r) = \frac{4\pi}{c} \int_0^r r dr j_z(r),$$

wobei, wie in der Aufgabe 10, $|\vec{B}| = \frac{B_\varphi(r)}{r}$. Nach einer einfachen Integration finden wir

$$|\vec{B}(r)| = \frac{2J}{cr} \cdot \begin{cases} \frac{r^2}{R_0^2}, & \text{für } r < R_0, \\ 1, & \text{für } R_0 \leq r < R_1, \\ 1 - \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, & \text{für } R_1 \leq r < R_2, \\ 0, & \text{für } R_2 \leq r. \end{cases}$$

12 Aufgabe

Die auf $\vec{j} = I\theta(R - \rho)\vec{e}_3$ wirkende Kraftdichte ist durch

$$\vec{f}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \vec{j}(x) \times \vec{B}(\vec{x}) = \frac{BI}{c} \theta(R - \rho) \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\frac{BI}{c} \theta(R - \rho) \vec{e}_1,$$

gegeben. Für die Dichte des Drehmoments finden wir

$$d^i = \epsilon^{ijk} x_j f_k = -\frac{B(z)I}{c} \theta(R - \rho) \epsilon^{ij1} x_j.$$

Die x und z Komponenten (d.h. 1 und 2) des Gesamtdrehmoments,

$$D^i = -\frac{I}{c} \int_{-a}^a dz \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \epsilon^{ij1} x_j B(z),$$

²Hierzu betrachtet man einen endlichen Zylinder um die Symmetrieachse.

³Hierzu sollen Schleifenintegrale auf den $r - z$ und $\varphi - z$ Hyperflächen betrachtet werden.

verschwinden wegen der φ -Integration ($x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$). Für D^y ergibt sich

$$D^y = -\frac{I}{c} \int_{-a}^a dz \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \epsilon^{231} z B(z) = \dots = 0$$

im Fall $B(z) = \text{const}$ (wegen der z -Integration) und

$$D^y = -\frac{2\pi R^2 a^3 I}{3c}$$

für $B(z) = z$.