UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Elektrodynamik

Übungsblatt 3

Musterlösungen

7 Aufgabe

Mit der Bezeichnung $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ führen wir den Separationsansatz

$$\varphi(\vec{x}) = X(x)Y(y)Z(z),$$

und aus der Poisson-Gleichung erhalten die Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
\frac{d^2Y}{dy^2} &= -k_1^2 Y \\
\frac{d^2Z}{dz^2} &= -k_2^2 Z \\
\frac{d^2X}{dx^2} &= +(k_1^2 + k_2^2)^2 X.
\end{aligned}$$

Die Konstanten k_1, k_2 müssen reell sein, denn sonst wurde das Feld im Unendlichen exponentiell wachsen. Für $p^2 = k_1^2 + k_2^2 > 0$ gilt

$$X(x) = A\sinh(px) + B\cosh(px),$$

mit beliebigen Konstanten A, B. Aus der Randbedingung, die zu $X(0) = 0$ äquivalent ist, folgt $B = 0$. Die allgemeine Lösung ist dann durch

$$\varphi(\vec{x}) = A\sinh(px)\sin(k_1 y + \alpha_1)\sin(k_2 z + \alpha_2)$$

gegeben. Nun die Randbedingung $\varphi(D, x, y) = V > 0$ lässt sich nur dann erfüllen, wenn $k_1 = 0 = k_2$ (die Konstanten α_1, α_2 müssen gleichzeitig $\neq 0$ sein).

Für $k_1 = 0 = k_2$ ist die Lösung durch

$$\varphi(\vec{x}) = \alpha x + \beta$$

gegeben. Die Konstanten α, β werden durch die beiden Randbedingungen auf (jeweils) $V/D, 0$ festgelegt. Schließlich gilt

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{V\,x}{D},$$

und

$$\vec{E} = \left(-\frac{V}{D}, 0, 0 \right).$$

8 Aufgabe

Aus der Gleichung

$$\nabla \times B = \frac{4\pi}{c}\, j$$

folgt

$$-\nabla^2 B_i = \frac{4\pi}{c}\, (\nabla \times j)_i \equiv \frac{4\pi}{c}\, \omega_i.$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe der Greenschen Funktion gelöst werden,

$$B_i(\vec{x}) = -\frac{1}{c} \int d^3y\, \frac{\omega_i(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|},$$

wobei

$$\omega^2(\vec{x}) = \epsilon^{231} \partial_3 [\delta(x^2)\delta(x^3)] = \delta(x^2)\delta'(x^3), \qquad \omega^3(\vec{x}) = \epsilon^{321} \partial_2 [\delta(x^2)\delta(x^3)] = -\delta'(x^2)\delta(x^3).$$

Wegen

$$\int f(s)\, \delta'(s)\, ds = -\int f'(s)\, \delta(s)\, ds,$$

folgt

$$B_2(\vec{x}) = -\frac{1}{c} \int d^3y\, \frac{\delta(y^2)\delta'(y^3)}{\sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2}} = \frac{x^3}{c} \int \frac{dy^1}{\sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}^3} = \frac{2x^3}{c\rho^2},$$

wobei $\rho = \sqrt{(x^2)^2 + (x^3)^2}$, und in der Integration die Substitution

$$u = (x^1 - y^1)/\rho = \sinh \psi$$

günstig war. Analog gilt

$$B_3(\vec{x}) = -\frac{2x^2}{c\rho^2}.$$

In der Zylinderkoordinaten,

$$x^2 = r \sin \varphi, \qquad x^3 = r \cos \varphi,$$

ist die Form des Feldes besonders einfach, denn

$$B_\varphi = \frac{\partial x^2}{d\varphi}\, B_2 + \frac{\partial x^3}{d\varphi}\, B_3 = \frac{2}{c}.$$

Dieses Resultat war auch zu erwarten, denn aus dem Sokesschen Satz folgt

$$2\pi B_\varphi = \int_{\partial\mathcal{C}} B_i dx^i = \int_{\mathcal{C}} (\nabla \times B)_i d\sigma^i = \frac{4\pi}{c} \int j_i \, d\sigma^i = \frac{4\pi}{c},$$

für einen Kreis $\mathcal{C} = \{(r, \varphi) : r \leqslant R\}$ mit einem beliebigen Radius R.

Unsere ursprüngliche Überlegung zeigt, dass die Rotation eines Vektorfeldes

$$\vec{V} = (V_1, V_r, V_\varphi) = (0, 0, 1)$$

singulär entlang $r = 0$ ist; genauer gesagt wir haben die Gültigkeit von

$$(\nabla \times V) = 2\pi\delta(x^2)\delta(x^3)\,(1, 0, 0)$$

bewiesen. Wäre diese Tatsache bekannt, so könnten wir nur mit Hilfe des Stokesschen Satzes argumentieren, denn das Vektorfeld $B = (B_1, B_r, B_\varphi) = (0, 0, 2/c)$ bereits die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$(\nabla \times B) = \frac{4\pi}{c}\, j$$

liefert. Eine allgemeine Lösung hat die Form einer Summe

$$\vec{B}_{allgem} = \vec{B} + \vec{B}_0,$$

wobei $\vec{B}_0$ eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung

$$\nabla \times B_0 = 0$$

bezeichnet. Die homogene Lösung, $\vec{B}_0$, kann nicht durch lokale Überlegungen, sondern nur durch Randbedingungen/Abfallverchalten im Unendlichen wegargumentiert werden[1] (z.B. durch die Annahme, das das Feld $\vec{B}_{allgem}$ im Unendlichen verschwinden soll).

9 Aufgabe

In der Aufgabe 4 wurde das Vektorfeld A^i gefunden, das die Gleichung

$$(\nabla \times A)^i = V^i$$

erfüllt, wobei V^i das Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden Kugel bezeichnet. In der Aufgabe 9 ist das Problem völlig analog: zu bestimmen ist das Magnetfeld B^i das die Gleichung

$$(\nabla \times B)^i = \frac{4\pi}{c}\, \rho_0 V^i$$

[1] Alle Komponenten des (lokalen) Magnetfeldes, $B_{allgem}(\vec{x})$, können beeinflusst werden durch bestimmte Randwerte im Unendlichen.

erfüllt, wobei V^i *das gleiche Geschwindigkeitsfeld* bezeichnet, und ρ_0 für die (konstante) Ladungsdichte steht. Wir Schließen, dass

$$B^i = \frac{4\pi\rho_0}{c}\, A^i.$$

Es ist bemerkenswert, dass das Magnetfeld äusserhalb der Kugel nur eine Dipol-Komponente besitzt. (Eine rotierende geladene Kugel erzeugt einen Dipol-Magnetfeld.)