

UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Elektrodynamik

Übungsblatt 2

Musterlösungen

4 Aufgabe

Unseres Vektorfeld ist

$$v^i = \epsilon^{ijk} \Omega_j x_k \theta(R - r).$$

Mit Hilfe der Identität

$$\partial_i \theta(R - r) = \delta(R - r) \cdot \frac{-x_i}{r} = -n_i \delta(R - r),$$

wobei $n_i = x_i/r$, finden wir

$$\begin{aligned} \partial_i v^i &= 0, \\ (\nabla \times v)^m &= \underbrace{2\Omega^m \theta(R - r)}_{4\pi\omega_0^m} - \underbrace{R\delta(R - r) \Omega_n (\delta^{mn} - n^m n^n)}_{4\pi\omega_1^m}. \end{aligned}$$

Aus der verschwindenden Divergenz schließen wir, dass es möglich wird das Vektorfeld ω^i durch

$$v^i = (\nabla \times A)^i$$

auszudrücken. Das Vektorfeld A^i soll divergenzfrei sein, und die Poisson-Gleichung

$$-\nabla^2 A^i = 4\pi\omega^i$$

erfüllen. Wir bestimmen A^i , separat für ω_0^i und ω_1^i , mit Hilfe der Greenschen Funktionen:

$$A^i(\vec{x}) = - \int d^3y \frac{\omega^i(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}.$$

Für A_0^i , dessen Quelle ein homogenes Vektorfeld innerhalb der Kugel ist, ergibt sich

$$A_0^i(\vec{x}) = -\frac{\Omega_i}{2\pi} \int d^3y \frac{\theta(R - |\vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -\Omega^i \cdot \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{R^3}{|\vec{x}|} & \text{äusserhalb der Kugel,} \\ \left(R^2 - \frac{|\vec{x}|^2}{3}\right) & \text{innerhalb der Kugel.} \end{cases}$$

Andererseits wird die Quelle von A_1^i durch ein zu der Sphäre $|\vec{x}| = R$ tangentiales Vektorfeld gegeben, das zusätzlich sein Träger nur auf der Oberfläche der Kugel hat. Es gilt

$$A_1^a(\vec{x}) = \frac{R^3 \Omega_b}{4\pi} \int_{|\vec{y}|=R} \sin(\theta) d\theta d\varphi \frac{(\delta^{ab} - n^a n^b)}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

Unsere Aufgabe ist jetzt den Tensor

$$T^{ab}(\vec{x}) = \int_{|\vec{y}|=R} \sin(\theta) d\theta d\varphi \frac{(\delta^{ab} - n^a n^b)}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \int \sin(\theta) d\theta d\varphi \frac{(\delta^{ab} - n^a n^b)}{\sqrt{R^2 + |\vec{x}|^2 - 2R|\vec{x}| \cos \theta}}$$

durch Integration zu bestimmen. Es gilt: $\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$. Die φ -Integration ist immer einfach, und liefert den Resultat, dass alle nicht-diagonale Elemente von T^{ab} verschwinden. Mit Hilfe der Substitution

$$u = R^2 + |\vec{x}|^2 - 2R|\vec{x}| \cos \theta,$$

ist die θ -Integration auch elementar. Der einfachste, δ^{ab} -Term, ergibt

$$\int \sin(\theta) d\theta d\varphi \frac{\delta^{ab}}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{4\pi}{|\vec{x}|} \delta^{ab},$$

äusserhalb der Kugel, und $4\pi/R$ innerhalb der Kugel. Weiterhin gilt

$$\int \sin(\theta) d\theta d\varphi \frac{n^a n^b}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{4\pi}{3|\vec{x}|} \delta^{ab} + \frac{4\pi}{15} \frac{R^2}{|\vec{x}|^3} \text{diag}(2, -1, -1),$$

innerhalb der Kugel (und $|\vec{x}| \leftrightarrow R$ innerhalb der Kugel.)

Die Ergebnisse werden am einfachsten mit Hilfe des (spurlosen) Tenors W^{ab} ,

$$\text{diag}(2, -1, -1) = W^{ab}(\vec{x}/|\vec{x}|) = 3n^a n^b - \delta^{ab},$$

der nur von der Richtung $\vec{n}$ abhängt, dargestellt. Wir finden

$$T_{ext}^{ab}(\vec{x}) = 4\pi(1 - \frac{1}{3}) \frac{\delta^{ab}}{|\vec{x}|} - \frac{4\pi}{15} \frac{R^2}{|\vec{x}|^3} W^{ab}(\vec{x}),$$

äusserhalb der Kugel, und

$$T_{int}^{ab}(\vec{x}) = 4\pi(1 - \frac{1}{3}) \frac{\delta^{ab}}{R} - \frac{4\pi}{15} \frac{|\vec{x}|^2}{R^3} W^{ab}(\vec{x}),$$

innerhalb der Kugel.

Das Gesamtpotential $\vec{A}$ ist damit durch

$$A^i = A_0^i + \frac{R^3}{4\pi} \Omega_b T^{ab}(\vec{x})$$

gegeben, was sich äusserhalb der Kugel zu

$$A^i = \frac{R^5}{15|\vec{x}|^3} (\delta^{ij} - n^i n^j) \Omega_j$$

vereinfacht (wir bemerken, dass die Anteile, die als $|\vec{x}|^{-1}$ von dem Abstand abhängen haben sich gerade wegkompensiert).

5 Aufgabe

Bei der Berechnung des Flusses eines Vektorfeldes durch eine Fläche spielt nur die normale Komponente des Feldes eine Rolle. Im unseren Fall gilt

$$n^a E_a = \frac{x^a E_a}{r} = -\frac{x^a \partial_a \varphi}{r} = -\partial_r \varphi = \frac{2 \cos \theta}{r^3}.$$

Der Fluss des elektrischen Feldes durch die Halbsphäre ist durch

$$\int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi n^a E_a = \frac{2\pi}{R} \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) d\theta = -\frac{\pi}{R} \cos(2\theta)|_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{R}$$

gegeben. Währe die obere Grenze der Integration bei $\theta = \pi$ gelegt, so würde das Integral verschwinden.

6 Aufgabe

Es gilt

$$n^i \partial_i (x + \psi) = \partial_r (r \sin \theta \cos \varphi + \psi) = \sin \theta \cos \varphi + \partial_r \psi = 0$$

auf $r = |\vec{x}| = R$. Nun besitzt ψ , als im Unendlichen verschwindende Lösung der Laplace-Gleichung in $\mathbb{R}^3/\{0\}$, die Zerlegung

$$\psi = \sum_{\ell, m} r^{-\ell-1} c_{\ell, m} Y_{\ell, m}(\theta, \varphi),$$

und es gilt auch

$$\sin \theta \cos \varphi = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_{1, -1} - Y_{1, 1}).$$

Aus der letzten Gleichung erkennen wir, dass nur die $\ell = 1$ Kugelfunktionen nötig werden. Wegen der Randbedingung muss

$$\sqrt{\frac{2\pi}{3}} = 2R^{-3} c_{1, -1}, \quad \sqrt{\frac{2\pi}{3}} = -2R^{-3} c_{1, 1},$$

gelten. Wir finden damit

$$\psi = \sqrt{\frac{\pi}{6}} [Y_{1, -1} - Y_{1, 1}] \frac{R^3}{r^2},$$

d.h.

$$x + \psi = r \sin \theta \cos \varphi \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right).$$

Es ist jetzt einfach zu verifizieren, dass $\partial_r(x + \psi) = 0$ auf der Oberfläche der Kugel $r = R$.