UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
Elektrodynamik

Übungsblatt 1
Musterlösungen

1 Aufgabe

Wir rechnen zunächst die quadratische Form der kinetischen Energie eines freien Teilchens zu den Kugelkoordinaten um:

$$T = \dot{x}_i \dot{x}^i = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2.$$

Davon lässt sich jetzt die Form des metrischen Tensors ablesen,

$$g_{ij} = \mathrm{diag}(1, r^2, r^2\sin^2\theta), \quad g^{ij} = \mathrm{diag}(1, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2\sin^2\theta}), \quad \sqrt{g} = r^2\sin\theta.$$

Somit ist der Laplace-Operator, Δ, im Kugelkoordinaten durch

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\,\partial_r[r^2\partial_r f] + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta f) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 f\right],$$

gegeben. Auf einer Einheitssphäre, $r = 1$, ist die kinetische Energie durch

$$T = \dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2$$

gegeben, und mit

$$g_{ij} = \mathrm{diag}(1, \sin^2\theta), \quad g^{ij} = \mathrm{diag}(1, \frac{1}{\sin^2\theta}), \quad \sqrt{g} = \sin\theta.$$

gilt

$$L^2 f = \frac{1}{\sin(\theta)}\,\partial_\theta[\sin(\theta)\partial_\theta f] + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\partial_\varphi^2 f.$$

Der gesuchte Zusammenhang zwischen Δ und L^2 ist jetzt offensichtlich.

2 Aufgabe

Die $R_\ell(r)$ erfüllen die Differentialgleichung[1]:

$$R'' + \frac{2R'}{r} - \frac{\ell(\ell+1)R}{r^2} = 0, \quad \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

aus der mit Hilfe des Ansatzes $R_\ell = r^\alpha$ folgt

$$[\alpha(\alpha+1) - \ell(\ell+1)]r^{\alpha-2} = 0,$$

also die beide Lösungen unserer Differentialgleichung sind

$$R_\ell(r) = r^\ell, \qquad \tilde{R}_\ell(r) = r^{-\ell-1},$$

und somit sind

$$V_{\ell,m}(r,\theta,\varphi) = r^\ell Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \qquad \tilde{V}_{\ell,m}(r,\theta,\varphi) = r^{-\ell-1} Y_{\ell m}(\theta,\varphi),$$

die (separierten) Lösungen der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten.

Um die Funktion $V_h = -r\sin\theta\sin\varphi$ zu zerlegen, merken wir zunächst, dass Sie als r^1 von r abängt. Somit muss $\ell = 1$ sein. Es gibt nur drei Kugelfunktionen zu $\ell = 1$:

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_{1,\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}.$$

Wir finden sofort, dass

$$V_h = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{r}{2i}\big[Y_{1,-1}(\theta,\varphi) + Y_{1,-1}(\theta,\varphi)\big].$$

3 Aufgabe

Die Integration ist am einfachsten in Polarkoordinaten, (r,φ), $g_{ij} = \mathrm{diag}(1, r^2)$, $\sqrt{g} = r$, durchzuführen. Es gilt

$$\int_{\text{Kont.}} v_i dx^i = \int_{\text{Kont.}} (v_r dr + v_\varphi d\varphi) = \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\varphi = 2\pi$$

im Falle von C, und

$$\int_{\text{Kont.}} v_i dx^i = \int_0^{-\pi} d\varphi + \int_{r_1}^{r_2} 0 \cdot dr + \int_{-\pi}^{0} d\varphi + \int_{r_2}^{r_1} 0 \cdot dr = 0,$$

im Falle von K, wobei die positive Richtung der Konturen angenommen wurde.

Wir erkennen auch, dass das angegebene Vektorfeld ein reguläres Gradientenfeld im $\mathbb{R}/\{0\}$

[1] Das nicht in der Aufgabenstellung angegebene einschränkung der Werten von ℓ, die eine der Eigenschaften von L^2 ist, wird hier angenommen.

wegen

$$v_i = \partial_i(\varphi) = \partial_i[\arctan(y/x)],$$

ist. Somit verschwindet dessen Rotation auf $\mathbb{R}/\{0\}$. Diese Tatsache lässt sich auch in den kartesischen- oder in den polar-Koordinaten explizit verifizieren:

$$\mathrm{rot} v = \frac{1}{r}\left(\partial_r v_\varphi - \partial_\varphi v_r\right) = 0, \qquad \text{für } r > 0.$$

(In zwei Dimensionen den Rotationstensor $\partial_a v_b - \partial_b v_a$ entspricht der bereits berechnete Skalar.)