Die Laplace-Gleichung

Dr. Piotr Marecki

April 19, 2008

1 Einführung

Die Randwertprobleme für die Laplace Gleichung,

$$\nabla^2 V(x) = 0, \tag{1}$$

spielen in der Theoretischen Physik eine wichtige Rolle, u.a. :

- In der Elektrostatik wird das elektrische Feld aus

  $$E_i = -\partial_i V$$

  gewonnen, wobei in typischen Problemen das Potential $V(x)$ an der Oberfläche eines Gebietes vorgegeben ist.

- In der Magnetostatik gilt

  $$B_i = -\partial_i V,$$

  wobei in typischen Problemen der Gradient von V (also die magnetische Induktion B_i) tangential zur Oberfläche eines Gebietes sein soll, d.h. $n^i \partial_i V = 0$ mit einem zu der Oberfläche senkrechten Normalvektor n^i.

- In der Hydrodynamik wird das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung eines inkompressiblen, wirbelfreien Fluids auch durch

  $$v_i = -\partial_i V$$

  gegeben, wobei, wie in der Magnetostatik, muss $\partial_i V$ tangential zu der Oberfläche eines Gebietes sein.

2 Lösungsmethoden

Die Laplace-Gleichung ist linear, d.h. für zwei gegebene Lösungen dieser Gleichung, V_1 und V_2, die Linearkombination $\alpha V_1 + \beta V_2$, mit konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ auch eine Lösung der Laplace-Gleichung darstellt.

In diesem Kapitel werden wir versuchen hinreichend reiche Familien der Lösungen (zu jedem Randwertproblem eine), $\{V_{a,b}\}$, zu konstruieren. Für ein gegebenes Randwertproblem wird die gefundene Familie als "hinreichend reich" angesehen wenn jede Lösung der Laplace-Gleichung durch die Linearkombination der zu dieser Familie gehörigen Lösungen,

$$V(x) = \sum_{a,b} V_{a,b}(x)$$

ausgedrückbar wird. Die Familien werden mit Hilfe von Separationsansätzen konstruiert.

2.1 Kartesische Koordinaten

In kartesischen Koordinaten lautet die Laplace-Gleichung folgendermaßen:

$$\partial_x^2 V + \partial_y^2 V + \partial_z^2 V = 0.$$

Mit dem Separationsansansatz

$$V(\vec{x}) = X(x)Y(y)Z(z)$$

wird die Laplace-Gleichung auf

$$\frac{\partial_x^2 X}{X} + \frac{\partial_y^2 Y}{Y} + \frac{\partial_z^2 Z}{Z} = 0$$

umgeformt. Nun ist aus dieser Form klar, dass die Summanden konstant, d.h. vom Punkt unahbängig, sein müssen. Wir erhalten

$$\partial_z^2 Z = -k^2 Z, \tag{2}$$

$$\partial_y^2 Y = -p^2 Y, \tag{3}$$

$$\partial_x^2 X = +(k^2 + p^2) X, \tag{4}$$

mit k^2, p^2 im allgemeinen Fall aus $\mathbb{C}$. Für reelle p^2, k^2 sind die Funktionen $Y(y)$ und $Z(z)$ in deren Definitionsbereich (auf ganzem $\mathbb{R}$) beschränkt. Anderseits muss $X(x)$ in diesem Fall exponentiell mit x oder $-x$ wachsen. Da wir aber keine unendlich große Elektrische/Magnetische Felder zulassen wollen, musste eine solche Lösung auscheschlossen werden, sollte x zu $\mathbb{R}$ gehören. Wäre die Variationsbereich von x zumindest von einer Seite beschränkt, z.B. $x \geqslant 0$, so existiert eine Familie von akzeptablen Lösungen:

$$X(x) = \exp(-x \cdot \sqrt{p^2 + k^2}),$$

d.h.

$$V_{k,p}(x, y, z) = \exp(-x \cdot \sqrt{p^2 + k^2}) \sin(py + \alpha) \sin(kz + \beta)$$

mit $k, p, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allgemeine Lösungen sind dann als Linearkombinationen von $V_{k,p}$ ausdrückbar:

$$V_{allgemein}(x,y,z) = \int dk\, dp\, f(k,p)\, V_{k,p}(x,y,z),$$

mit einer beliebigen Funktion $f(k,p)$. Schränken wir diese allgemeine Lösung auf $x = 0$ so ist eine Form der Fouriertransformation in $\mathbb{R}^2$ erkennbar, und es lässt sich schließen dass jede Randwertverteilung $V_{allgemein}(0,y,z)$ tatsächlich durch eine Linearkombination der Funktionen unserer Familie darstellbar ist[1].

Es ist klar dass die hier gefundene Familie, obwohl reich genug, nicht allgemein genug ist (wir können nur die Randwertprobleme auf einer flachen Ebene $x = 0$ lösen). Um einen großeren Anzahl von Problemen lösen zu können werden wir die Laplace-Gleichung zu anderen Koordinaten transformieren.

2.2 Laplace-Gleichung in beliebigen Koordinaten

In diesem Kapitel werden wir die wichtigsten Resultate der Differentialgeometrie wiederholen. Es sei[2]

$$T = \delta_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j$$

die kinetische Energie eines punktformigen Teilchens in kartesichen Koordinaten $\delta_{ij} = \mathrm{diag}(1,1)$. In anderen Koordinaten, ξ_i, gilt zunächst

$$\dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\, \dot{\xi}^j$$

sodass

$$T = g_{ij}\, \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j.$$

Die symmetrische Matrix g_{ij} ist als metrischer Tensor bekannt. Mit Hilfe von g_{ij} lässt sich die ganze Differentialgeometrie entwicklen/konstruieren. Es sei $g = \det(g_{ij})$ die Determinante der Matrix g_{ij} und g^{ij} die zu g_{ij} inverse Matrix,

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j.$$

Es gelten die folgenden Regel/Ergebnisse:

- Die kovarianten Vektoren w_i werden aus kontravarianten Vektoren w^i mit Hilfe von g_{ij} bestimmt:

$$w_i = g_{ij} w^j.$$

- Der Skalarprodukt wird durch $(v, w) = v^i g_{ij} w^j$ definiert. Die Längen der Vektoren und die Winkel

[1]Genauer gesagt es werden vier Funktionen $f_{\alpha,\beta}(k,p)$ für $\alpha = 0, \pi/2$ und $\beta = 0, \pi/2$, benötigt.

[2]In diesem Dokument wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

werden wie üblich mit Hilfe des Skalarproduktes definiert, d.h. $|v|^2 = (v, v)$, und

$$(v, w) = |v||w| \cos_{\{v,w\}} .$$

- Der Gradient einer skalaren Funktion V ist durch die partielle Ableitung definiert,

$$(\nabla V)_i = \frac{\partial V}{\partial \xi^i}$$

und beschreibt einen *kovarianten* Vektor.

- Die Divergenz eines Vektorfeldes f^i ist durch

$$\nabla_i f^i = \nabla_i (g^{ij} f_j) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left(\sqrt{g}\, g^{ij} f_j \right)$$

gegeben[3].

- Der Laplace-Operator wird ist durch

$$\nabla^2 V = \nabla_i \nabla^i V = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left(\sqrt{g}\, g^{ij} \partial_j V \right)$$

definiert.

- Die Rotation eines Vektorfeldes ist durch

$$(\mathrm{rot} f)^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \partial_j f_k$$

definiert.

Beispiel 1 (Separation in Zylinderkoordinaten)**.** *Es sei*

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi), \\ y &= r\sin(\varphi). \end{aligned}$$

Wir finden $g_{rr} = 1$, $g_{\varphi\varphi} = r^2$, $\sqrt{g} = 1$, $g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2}$ *und*

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \partial_r [r \partial_r V] + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 V = 0.$$

[3]Der Symbol ∇_i bezeichnet die kovariante Ableitung, und die hier gegebene Formel wird im jeden Lehrbuch der Differentialgeometrie bewiesen.

Diese Gleichung kann mit Hilfe des Separationsansatzes:

$$V = R(r)F(\varphi),$$

mit einer periodischen Funktion $F(\varphi)$, gelöst werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \partial_\varphi^2 F &= -\ell^2 F, \\ R'' + \frac{R'}{r} - \frac{\ell^2 R}{r} &= 0. \end{aligned}$$

Aus der Periodizitätbedingung folgt, dass $\ell \in \mathbb{Z}$ und, dass nur

$$\begin{aligned} f_\ell(\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\ell\varphi), \\ g_\ell(\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(\ell\varphi), \\ g_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

mit $\ell \in \mathbb{N}$ erlaubt und "unahbängig" sind. Wir bemerken, dass jede Funktion $G(\varphi)$ lässt sich durch eine Linearkombination von f_ℓ, g_ℓ, g_0,

$$G(\varphi) = \sum_\ell [c_\ell f_\ell(\varphi) + d_\ell g_\ell(\varphi)] + c_0 g_0$$

mit

$$c_\ell = \int d\varphi\, f_\ell(\varphi) G(\varphi), \qquad d_\ell = \int d\varphi\, g_\ell(\varphi) G(\varphi)$$

darstellen (die Familie $\{f_\ell, g_\ell, g_0\}$ ist "vollständig" auf dem Kreis). Außerdem gilt

$$\int d\varphi\, f_\ell(\varphi) g_\ell(\varphi) = 0, \quad \int d\varphi\, f_\ell(\varphi) f_m(\varphi) = \delta_{\ell m} = \int d\varphi\, g_\ell(\varphi) g_m(\varphi)$$

(die Funktionen sind "orthonormal").

Die gewöhnliche Differentialgleichung für $R(r)$ lässt sich ebenfalls problemlos lössen: wir versuchen $R(r) = r^\alpha$ und finden

$$(\alpha^2 - \ell^2) r^{\alpha - 2} = 0$$

woraus folgen die Lösungen

$$R_\ell = r^{-\ell}, \qquad \tilde{R}_\ell = r^\ell$$

im Fäll $\ell > 0$ und

$$R_0 = const, \qquad \tilde{R}_0 = \ln r$$

für $\ell = 0$.

Die gefundene Familie kann folgendermaßen zusammengefasst werden: wir haben die Familie von separierten Lösungen in der Form

$$\begin{aligned} V &= c_\ell r^{-\ell}\sin(\ell\varphi), & V &= d_\ell r^{-\ell}\cos(\ell\varphi), \\ V &= \tilde{c}_\ell r^{\ell}\sin(\ell\varphi), & V &= \tilde{d}_\ell r^{\ell}\cos(\ell\varphi), \quad \ell > 0 \\ V &= d_0, & V &= \tilde{d}_0 \ln r \end{aligned}$$

konstruiert. Jede im Unendlichen verschwindende Lösung der Laplace-Gleichung lässt sich mit Hilfe von c_ℓ und d_ℓ Lösungen als Linearkombination darstellen.

Beispiel 2 (Vektorpotential eines im Unendlichen homogenen Magnetfeldes um einer perfekt leitenden Zylinder)**.** *Wir nehmen an, dass das Potential die Neumannsche Randbedingung, $n^i\partial_i V_G$, an der Oberfäche des Zylinders erfüllen muss und dass es die Zerlegung*

$$V_G = V_\infty + V$$

wobei $V_\infty = -r\cos(\varphi+\alpha)$ das Potential eines homogenen Magnetfeldes (mit den Feldlinien unter dem Winkel α) bezeichnet, und V im Unendlichen verschwindet. V muss also aus den c_ℓ und d_ℓ Anteilen konstruiert werden gerade so, dass $n^i\partial_i V_G$ auf $r = R$, d.h. auf der Oberfläche des Zylinders, verschwindet. Wir erinnern an das Eulersche Theorem:

$$rn^i\partial_i(r^m) = x^i\partial_i(r^m) = mr^m.$$

Für die Ableitung des Gesamtpotentials gilt:

$$rn^i\partial_i V_G = x^i\partial_i\left[-r\cos(\varphi+\alpha) + \sum_\ell r^{-\ell}(c_\ell\sin(\ell\varphi) + d_\ell\cos(\ell\varphi))\right].$$

Es ist jetzt klar, dass nur die $\ell = 1$ Lösungen nötig werden, und dass für[4]

$$c_1 = R^2\sqrt{\pi}\sin(\alpha), \qquad d_1 = -R^2\sqrt{\pi}\cos(\alpha),$$

die Neumannsche Randbedingung auf $r = R$ erfüllt ist. Das dem gefundenen Potential entsprechende Magnetfeld wurde in der Abb. 1 dargestellt.

[4] Wir verwenden $\cos(\varphi+\alpha) = \cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha$.

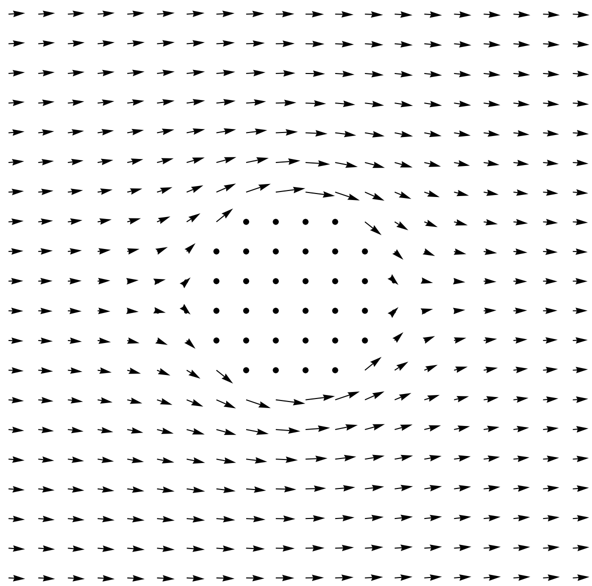

Abbildung 1: Magnetfeld im Außenraum eines perfekt leitenden Zylinders.