Übungen zur Elektrodynamik
Aufgabenblatt 11

Aufgabe 31

Es sei $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ der total antisymmetrische Einheitstensor in 4 dim., definiert durch

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ eine gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ eine ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \text{ ist} \\ 0 & \text{falls mindestens 2 Indices den gleichen Wert haben.} \end{cases}$$

Definieren Sie für ein anti-symmetrisches $\binom{0}{2}$ -Tensorfeld $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$:

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}.$$

- (a) Finden Sie die Matrixdarstellung von $*F^{\mu\nu}$ für den Fall $F_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu}$ (elektromagnet. Feldtensor).
- (b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F_{\beta\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\gamma\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\gamma} F_{\alpha\beta} = 0$$

äquivalent ist zu

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} *F^{\mu\nu} = 0.$$

Aufgabe 32

Beweisen Sie den Satz (6.4.B): Wenn die Lagrange-Dichte translationskovariant ist, d.h. wenn gilt

$$\mathcal{L}(\tau_a\phi, \partial\tau_a\phi)(x) = \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)(x - a) \quad \forall a, x$$

für alle Feldkonfigurationen ϕ , die Lösungen der Bewegungsgleichung sind, dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu\nu} = 0.$$

($T^{\mu\nu}$ gebildet für ϕ , die Lösungen der Bewegungsgleichung sind.)

Aufgabe 33

Ein reell-wertiges Feld $\phi(x)$ habe die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\mu \phi(x) - V(x)\phi(x)^2$$

mit einer festen reell-wertigen C^∞ -Funktion $V(x)$. Bestimmen Sie

- die Bewegungsgleichung für ϕ ,
- den kanonischen Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$
- Zeigen Sie, dass $T^{\mu\nu}$ symmetrisch ist und spurfrei, d.h. $\eta_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = 0$.
- Gilt $\frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu\nu} = 0$, oder gilt eine andere Bilanzgleichung?

[Wert jeder Aufgabe = 5 Punkte]

Abgabe: Am Mittwoch, den 9.7.2008 in der Vorlesung.