Prof. Dr. R. Verch
PD Dr. S. Fritzsche
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Übungen zur Elektrodynamik
Aufgabenblatt 10

Aufgabe 29
In den Koordinaten $x = (x^\mu) = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)^T$ eines Lorentzsystems sei $\xi(t)$ die Bahnkurve eines elektrisch geladenen Teilchens mit elektrischer Ladung q und Ruhemasse m_0. $\tilde{\xi}(\tau)$ sei die nach der Eigenzeit parametrisierte Bahnkurve des Teilchens mit Vierergeschwindigkeit $\tilde{u} = d\tilde{\xi}/d\tau$, und $\gamma = \gamma(t) = 1/\sqrt{1 - (|d\vec{\xi}(t)/dt|/c)^2}$. Der elektromagnetische Feldtensor in den Koordinaten des Lorentzsystems ist

$$(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,\ldots,3} = \begin{pmatrix} 0 & E^1/c & E^2/c & E^3/c \\ -E^1/c & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2/c & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3/c & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das elektrodynamische Vierpotential ist $\mathcal{A}(x^0, \vec{x})$. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\underset{\sim}{\mathcal{A}}_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\underset{\sim}{\mathcal{A}}_\mu$

(b) Mit der Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\tilde{\xi}, \tilde{u}) = -\frac{m_0}{2}\eta(\tilde{u}, \tilde{u}) - q\eta(\tilde{u}, \mathcal{A})$$

sind die Euler-Lagrange-Gleichungen,

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\mu}\mathcal{L}(\tilde{\xi}, \tilde{u}) - \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}^\mu}\mathcal{L}(\tilde{\xi}, \tilde{u}) = 0\,,$$

äquivalent zu den Gleichungen

$$m_0\eta_{\mu\nu}\frac{d}{d\tau}\tilde{u}^\nu = q\underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\mu\nu}\tilde{u}^\nu$$

(c) Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind äquivalent zur relativistischen Lorentzkraftgleichung für die Bahnkurve des Teilchens in einem elektromagnetischen Feld mit elektrischer Feldstärke $\vec{E} = \vec{E}(x^0, \underline{x})$ und Magnetfeld $\vec{B} = \vec{B}(x^0, \underline{x})$, gegeben durch

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma(t)d\vec{\xi}/dt) = q(\vec{E} + [d\vec{\xi}/dt \times \vec{B}]), \quad \frac{d}{dt}mc^2\gamma(t) = q(\vec{E} \cdot d\vec{\xi}/dt).$$

(d) Zeigen Sie mit Hilfe der Lorentzkraftgleichung, dass es nicht möglich ist, ein geladenes massives Teilchen in einem elektromagnetischen Feld auf eine Geschwindigkeit zu beschleunigen, die größer als die Lichtgeschwindigkeit ist.

[8 Punkte]

Aufgabe 30

Wenn $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ und $\underset{\sim}{\mathcal{F}}'$ die Matrizen der Koordinatenkompomenten des elektromagnetischen Feldtensors bezüglich zweier Lorentzsysteme sind, dann gibt des eine Lorentzmatrix Λ so, dass

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}}' = \eta\Lambda\eta\underset{\sim}{\mathcal{F}}\eta\Lambda^T\eta$$

im Sinne der Matrixmultiplikation gilt. Dabei ist η die Diagonalmatrix $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Zeigen Sie, dass dies aus der Bewegungsgleichung aus Teil (b) der vorhergehenden Aufgabe folgt. Zeigen Sie weiter: Unter den Bedingungen $\vec{B} \cdot \vec{E} \neq 0$ und $|\vec{B}| \neq |\vec{E}|$ ist es möglich, eine Lorentztransformation Λ so zu wählen, dass $\vec{E}'$ und $\vec{B}'$ parallel sind.

Hinweis: Der Ansatz ist $\Lambda = \Lambda_1(\theta)\Lambda_R$. Bestimmen Sie erst eine räumliche Drehmatrix R so, dass $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nach Wirkung der Drehung in der x^2-x^3-Ebene liegen. Bestimmen Sie dann die Rapidität θ bzw. $v = c\tanh(\theta)$ so, dass das Gewünschte erreicht wird. Setzen Sie die Lichtgeschindigkeit $c = 1$.

[7 Punkte]

Abgabe: Am Mittwoch, den 2.7.2008 in der Vorlesung.