Prof. Dr. R. Verch
PD Dr. S. Fritzsche
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Übungen zur Elektrodynamik
Aufgabenblatt 9

Aufgabe 26
Ein Photon mit dem Wellenvektor $k = (|\vec{k}|, \vec{k})^T$ wird von einem Beobachter mit der Vierergeschwindigkeit $u = (c\gamma, \vec{v}\gamma)^T$ aufgenommen, $\gamma = (1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2})^{-1/2}$. Berechnen Sie die Wellenlänge des Photons, die bei der Messung zu erwarten ist. (Wellenlänge λ ist definiert durch $\lambda = 2\pi/|\vec{k}|$.) Wie hängt sie vom Winkel θ zwischen den Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{k}$ ab?

Hinweis: $\cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{|\vec{v}||\vec{k}|}$

Aufgabe 27
(a) Es sei $\xi(t)$ eine lichtartige Kurve (C^2) die in einer festen räumlichen Richtung verläuft. Zeigen Sie, dass $\xi(t)$ eine Gerade ist.

(b) Es sei $[a, b] \ni t \mapsto \xi(t) \in \mathbb{R}^4$ eine zeitartige C^2-Kurve. Zeigen Sie, dass die Kurve nicht geschlossen sein kann (d.h. der Fall $\xi(t') = \xi(t'')$ für $t' < t''$ kann nicht eintreten).

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass aufgrund der Zeitartigkeit der Kurve immer entweder $\dot{\xi}^0(t) > 0$ oder $\dot{\xi}^0(t) < 0$ gelten muss.

(c) Zeigen Sie, dass jedes Paar von Punkten x und y im $\mathbb{R}^4$ durch eine raumartige Kurve verbunden werden kann. [4 Punkte]

Aufgabe 28
Es seien (x^0, x^1, x^2, x^3) die Koordinaten eines Lorentzsystems und es sei

$$\tilde{\xi}(\tau) = (\tilde{\xi}^0(\tau), \tilde{\xi}^1(\tau), \tilde{\xi}^2(\tau), \tilde{\xi}^3(\tau))^{\mathrm{T}}$$

die nach der Eigenzeit τ parametrisierte Bahnkurve eines materiellen (massiven) Teilchens.

(a) Warum ist es nicht sinnvoll, die Kurve $\tilde{\xi}(\tau)$ als eine Bahnkurve mit "konstanter Beschleunigung" bezeichnen, wenn sie von der Form

$$\frac{d^2}{dt^2}\xi^0(t) = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}\xi^j(t) = a^j \quad (j = 1, 2, 3)$$

ist mit Konstanten $a^j \neq 0$?

(b) Man sagt, dass eine Bahnkurve $\tilde{\xi}(\tau)$, die nach ihrer Eigenzeit τ parametrisiert ist, eine *konstante Beschleunigung* erfährt, wenn es eine Konstante α gibt so, dass

$$\alpha = \eta(\frac{d}{d\tau}\tilde{u}(\tau), \frac{d}{d\tau}\tilde{u}(\tau)), \quad \text{mit } \tilde{u} = \frac{d}{d\tau}\tilde{\xi} \text{ die Eigengeschwindigkeit}.$$

Betrachten Sie ein beliebiges $y \in \mathbb{R}^4$ und die Kurve

$$(*) \qquad \xi(t) = \Lambda_1(a \cdot t)y \quad (a > 0),$$

wobei

$$\Lambda_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) & 0 & 0 \\ -\sinh(\theta) & \cosh(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenzeitparametrisierung $\tilde{\xi}(\tau)$ dieser Kurve. Zeigen Sie, dass es sich dabei um eine Kurve mit konstanter Beschleunigung handelt. Skizzieren Sie die Kurve für die Fälle $y = (0, y^1, 0, 0)^{\mathsf{T}}$ mit $y^1 > 0$ und $y^1 < 0$. Bestimmen Sie Beschleunigung in Abhängigkeit von y.

(c) In der Situation von (b) sei $y = (0, y^1, 0, 0)^{\mathsf{T}}$ mit $y^1 > 0$. Die nach $(*)$ resultierende Kurve wird manchmal bezeichnet als eine Kurve "mit konstanter Beschleunigung in e_1-Richtung". Ist das richtig, bzw. wie sollte man dies richtig interpretieren?

(d) Betrachten Sie wieder die Kurve $\xi(t)$ aus $(*)$ mit $y = (0, y^1, 0, 0)^{\mathsf{T}}$, $y^1 > 0$. Berechnen Sie die Eigenzeit eines Beobachters, dessen Weltlinie durch diese Kurve gegeben ist, zwischen den auf der Kurve liegenden Ereignissen $y = (\pm\alpha \cdot y^1, 4 \cdot y^1, 0, 0)^{\mathsf{T}}$, wobei $\alpha = \sqrt{4^2 - 1}$. Vergleichen Sie dies mit der Eigenzeit eines Beobachters, der im zugrundeliegenden Lorentzsystem ruht, zwischen den beiden Ereignissen. [6 Punkte]

[Wert jeder Aufgabe = 5 Punkte]

Abgabe: Am Mittwoch, den 25.6.2008 in der Vorlesung.