Prof. Dr. R. Verch
PD Dr. S. Fritzsche
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Übungen zur Elektrodynamik
Aufgabenblatt 8

Aufgabe 23
Es sei $T(x) = \Lambda x + a$, $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4$, wobei Λ eine reelle 4×4 Matrix ist mit $\eta(\Lambda x, \Lambda y) = \eta(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^4$ ($\eta(x, y) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$), und $a \in \mathbb{R}^4$. Definieren Sie $T^* u(x) = u \circ T(x)$ für glatte Funktionen u, und zeigen Sie

$$T^* \circ \Box = \Box \circ T^* \,,$$

wobei

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^2)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^3)^2} \,.$$

Aufgabe 24
Betrachten Sie die Kugelwelle

$$u(t, \vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|} f(t - |\vec{x}|/c)$$

und die Koordinatentransformationen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t' \\ \vec{x}\,' \end{pmatrix} &= T_v^{Lorentz} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(t - v x^1/c^2) \\ \gamma(x^1 - vt) \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \,, \\ \begin{pmatrix} t'' \\ \vec{x}\,'' \end{pmatrix} &= T_v^{Galilei} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x^1 - vt \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wobei

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,.$$

Ist die Funktion u bzgl. der Koordinaten $t', \vec{x}\,'$ bzw. $t'', \vec{x}\,''$ wieder vom Typ einer Kugelwelle? Ändert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit? Erfüllt u bezüglich der neuen Koordinaten die ursprüngliche homogene Wellengleichung außerhalb der Koordinaten-Punkte, an denen die Funktion singulär wird? Betrachten Sie auch den Fall, dass v^2/c^2 sehr viel kleiner ist als 1.

Aufgabe 25

Zeigen Sie, dass jede Koordinatenwechsel-Abbildung T zwischen zwei Inertialsystemen affin ist, d.h. dass

$$T\tbinom{t}{\vec{x}} = \mathbf{B}\tbinom{t}{\vec{x}} + a \quad \left(\tbinom{t}{\vec{x}} \in \mathbb{R}^4\right)$$

gilt mit einer reellen, invertierbaren 4×4-Matrix $\mathbf{B}$ und einem Vektor $a \in \mathbb{R}^4$ (die jeweils abhängen von T).

Hinweis: Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass T bijektiv und C^2 ist, also eine 2-mal stetig differenzierbare Abbildung von $\mathbb{R}^4$ auf $\mathbb{R}^4$. Benutzen Sie die Eigenschaft von T, Geraden auf Geraden abzubilden, um zu schließen, dass die Taylorentwicklung von T um einen beliebigen Punkt keine höheren als lineare Terme enthalten kann. Folgern Sie daraus die globale affine Form von T.

[Wert jeder Aufgabe = 5 Punkte]

Abgabe: Am Mittwoch, den 18.6.2008 in der Vorlesung.