
Übungen zur Elektrodynamik
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 20

Es sei $\vec{k} = k\vec{e}_3$, $k > 0$, und

$$\varrho = (\vec{\eta}^* \vec{\eta})^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \overline{g_1} & g_1 \overline{g_2} \\ g_2 \overline{g_1} & g_2 \overline{g_2} \end{pmatrix}, \quad \vec{\eta} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\eta}_1 + i\vec{\eta}_2,$$

mit $g_i \in \mathbb{C}$, sei die Polarisationsmatrix der ebenen Welle

$$(*) \quad \vec{E}(t, \vec{x}) = \operatorname{Re} \vec{\eta} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \alpha)},$$

wobei $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$ sind, die auf $\vec{k}$ senkrecht stehen und $\vec{\eta}_1 \cdot \vec{\eta}_2 = 0$ erfüllen. Zeigen Sie:

- (i) $\operatorname{Spur}(\varrho) = 1$, $\det(\varrho) = 0$, $\varrho^* = \varrho$
(ii) Es gibt Zahlen $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{j=1}^3 s_j^2 = 1$, so dass

$$\varrho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + s_3 & s_1 + is_2 \\ s_1 - is_2 & 1 - s_3 \end{pmatrix}$$

(iii) Die ebene Welle

- ist zirkular polarisiert $\Leftrightarrow s_2 = \pm 1$
- ist linear polarisiert $\Leftrightarrow s_2 = 0$

Wenn ein Linearpolarisator mit Winkel ϕ zur $\vec{e}_1$ -Achse steht und die ebene Welle (*) in den Polarisator einläuft, dann hat die ebene Welle nach Passieren des Polarisators die Form

$$\vec{E}'(t, \vec{x}) = \text{Re } \vec{\eta}' e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \alpha')}, \quad \vec{\eta}' = \begin{pmatrix} P_\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\eta}, \quad \text{mit}$$

$$P_\phi = \begin{pmatrix} \cos^2 \phi & \cos \phi \sin \phi \\ \cos \phi \sin \phi & \sin^2 \phi \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(iv) $P_\phi P_\phi = P_\phi$.

(v) $\vec{E}'(t, \vec{x})$ ist linear polarisiert, und für die relative Intensität $I_{\text{rel}}(\phi) = (\vec{\eta}'^* \vec{\eta}' / \vec{\eta}^* \vec{\eta})^{1/2}$ ergibt sich

$$I_{\text{rel}}(\phi) = \text{Spur}(\rho P_\phi).$$

Aufgabe 21

Berechnen Sie für einen Punktdipol bei $\vec{x} = 0$ mit Dipolmoment

$$\vec{d}(t) = d \vec{e}_1 \cos(\omega t)$$

(i) den Poynting-Vektor $\vec{S}(t, \vec{x})$ in der Fernfeldnäherung

(ii) die mittlere abgestrahlte Leistung

$$\overline{P} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \int_{\{|\vec{x}|=R\}} \vec{S}(t, y) \cdot \vec{n}_O(y) d\sigma(y) dt$$

mit $T\omega = 2\pi$ und R so groß, dass die Fernfeldnäherung gilt

(iii) in geeigneten sphärischen Polarkoordinaten die Richtungsabhängigkeit (als Funktion eines polaren Winkels) der mittleren in Richtung $\vec{n} = \vec{x}/|\vec{x}|$ abgestrahlten Leistung

$$\overline{P}(\vec{n}) = R^2 \vec{n} \cdot \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \vec{S}(t, R\vec{n}) dt$$

in der Fernfeldnäherung.

Aufgabe 22

Eine Stromdichteverteilung $\vec{j}(t, \vec{x})$ sei gegeben durch

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{j}(t, \vec{x}) = I_0 \cos(\omega t) \int_{-\ell}^{\ell} f^3(0, 0, \lambda) d\lambda$$

für alle C_0^∞ -Vektorfelder

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f^1(x^1, x^2, x^3) \\ f^2(x^1, x^2, x^3) \\ f^3(x^1, x^2, x^3) \end{pmatrix},$$

I_0, ω, ℓ sind positive Konstanten.

Bestimmen Sie eine solche Ladungsdichte $\rho(t, \vec{x})$, die zusammen mit $\vec{j}(t, \vec{x})$ die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

erfüllt.

Berechnen Sie

- (i) $\vec{E}^{ret}$ und $\vec{B}^{ret}$ in der Fernfeldnäherung.
- (ii) Den zugehörigen Poynting-Vektor $\vec{S}(t, \vec{x})$.
- (iii) Die zur Zeit t abgestrahlte Leistung

$$P_{Str}(t) = \int_{\{|\vec{x}|=R\}} \vec{S}(t, y) \cdot \vec{n}_O(y) d\sigma(y),$$

d.h. das Integral des Poynting-Vektors über eine Kugeloberfläche mit sehr großem Radius R (so dass die Fernfeldnäherung zulässig ist).

[Wert jeder Aufgabe = 5 Punkte]

Abgabe: Am Mittwoch, den 11.6.2008 in der Vorlesung.