Prof. Dr. R. Verch

PD Dr. S. Fritzsche
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Übungen zur Elektrodynamik
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 17

Die homogenen Maxwell-Gleichungen für das elektrische Feld $\vec{E}(t,\vec{x})$ und das Magnetfeld $\vec{B}(t,\vec{x})$ lauten (in Gauß-Einheiten)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = 0,$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Machen Sie den "Ebene-Wellen"-Ansatz,

$$(*) \qquad \begin{cases} \vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{E}_0\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{x})} \\ \vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{B}_0\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{x})} \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sein müssen, damit dieser Ansatz zu Lösungen der homogenen Maxwell-Gleichungen führt:

(a) $c^2|\vec{k}|^2 = \omega^2$ (Dispersionsrelation),

(b) $\vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c}\vec{B}_0$,

(c) $\vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c}\vec{E}_0$,

(d) $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$ und $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$ (Transversalität),

(e) $\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k}$ bilden eine rechtshändig orientierte orthogonale Basis des $\mathbb{R}^3$ (sofern $\vec{E}_0 \neq 0, \vec{B}_0 \neq 0, \vec{k} \neq 0$).

(f) $|\vec{E}_0| = |\vec{B}_0|$.

(ii) Man sagt, dass die ebenen Wellen, $(*)$, die den Bedingungen (a-f) genügen, sich "als ebene Wellen mit Phasengeschwindigkeit $\vec{v}_{Ph} = c\,\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ transversal ausbreiten".

Erläutern Sie diesen Sachverhalt (Verwendung von Skizzen zur Veranschaulichung ist wünschenswert).

Aufgabe 18

Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Eine Funktion der Form

$$\xi^\pm(t, \vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}\, f\left(t \pm \tfrac{|\vec{x}|}{c}\right)$$

bezeichnet man als <u>einlaufende</u> $(+)$ bzw. als <u>auslaufende</u> $(-)$ Kugelwelle.

Zeigen Sie, dass im Sinne von Distributionen die Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\xi^\pm(t, \vec{x}) - \Delta\xi^\pm(t, \vec{x}) = 4\pi\delta(\vec{x})\, f(t),$$

gilt (mit $\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{x}) h(\vec{x})\, d^3x = h(\vec{0})$ für jede Testfunktion h). Erläutern Sie die Bezeichnung ein- bzw. auslaufende Kugelwelle (unter Zuhilfenahme von Skizzen, Betrachtung spezieller Funktion f).

Aufgabe 19

(a)

Für die inhomogenen Wellengleichungen des elektrodynamischen Potentials $\mathcal{A} = \binom{\phi}{\vec{A}}$ in Lorentzeichung,

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho\,, \quad \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu_0\vec{j}\,,$$

mit $\varrho, \vec{j}$ beliebig oft differenzierbar und mit kompaktem Träger, seien die retardierten Lösungen ϕ^{ret} und $\vec{A}^{\mathrm{ret}}$ mit Hilfe der retardierten Greenschen Funktion

$$\mathcal{G}^{\mathrm{ret}}(t, \vec{x}, s, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|}\,\delta\left((t - s) - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c}\right)$$

gebildet.

Zeigen Sie, dass die zu $\mathcal{A}^{\mathrm{ret}} = \binom{\phi^{\mathrm{ret}}}{\vec{A}^{\mathrm{ret}}}$ gehörenden Felder $\vec{E}(t, \vec{x})$ und $\vec{B}(t, \vec{x})$ die folgende Ausbreitungseigenschaft besitzen (endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit in die Zukunft):

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$$

für alle $(t, \vec{x})$ außerhalb der Menge $V_c^+(S)$, wobei S die kleinste abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^4$ ist mit $\varrho(s, \vec{y}) = 0$ und $\vec{j}(s, \vec{y}) = 0$ für alle $(s, \vec{y}) \in \mathbb{R}^4 \backslash S$.

Skizzieren Sie diesen Sachverhalt in einem Raum-Zeit-Diagramm.

(b)

Im Fall der Coulomb-Eichung, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, sind die inhomogenen Gleichungen für $\mathcal{A}_C = \binom{\phi_C}{\vec{A}_C}$:

$$-\Delta\phi_C = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho\,, \quad -\Delta\vec{A}_C + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}_C = \mu_0\vec{j} - \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\phi_C\,.$$

Zeigen Sie: In diesem Fall besitzt die Lösung ϕ_C nicht die Ausbreitungseigenschaft wie ϕ^{ret}, aber eine Lösung $\mathcal{A}_C$ kann so gewählt werden, dass die daraus gebildeten Felder $\vec{E}_C$ und $\vec{B}_C$ dieselben Ausbreitungseigenschaften wie die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus (a) besitzen.

Hinweis: $V_c^+(S)$ ist definiert wie in der Vorlesung als Abschluss von $\cup_{(s,\vec{y})\in S} V_c^+(s,\vec{y})$, wobei $V_c^+(s,\vec{y}) = \{(t,\vec{x}) : t \geq s\,,\ \ c(t-s) = |\vec{x}-\vec{y}|\}$ der Zukunftslichtkegel des Raum-Zeit-Punktes $(s,\vec{y})$ ist. Sie können benutzen, dass $\mathcal{G}^{\mathrm{ret}}(t,\vec{x},s,\vec{y}) = 0$ ist, wenn $(t,\vec{x})$ außerhalb von $V_c^+(s,\vec{y})$ liegt.

[Wert jeder Aufgabe = 5 Punkte]

Abgabe: Am Mittwoch, den 4.6.2008 in der Vorlesung.