Prof. Dr. R. Verch

PD Dr. S. Fritzsche
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Übungen zur Elektrodynamik
Aufgabenblatt 5

Aufgabe 13

(a) Es sei eine Ladungsverteilung $\rho(t,\vec{x})$ und Stromdichte $\vec{j}(t,\vec{x})$ gegeben.
Welche Gleichungen erfüllt das elektrodynamische Potential

$$\mathcal{A}(t,\vec{x}) = \begin{pmatrix} \phi(t,\vec{x}) \\ \vec{A}(t,\vec{x}) \end{pmatrix}$$

unter Annahme der temporalen Eichung $\phi = 0$?

(b) Es sei ein elektrodynamisches Potential

$$\mathcal{A}(t,\vec{x}) = \begin{pmatrix} \phi(t,\vec{x}) \\ \vec{A}(t,\vec{x}) \end{pmatrix}$$

gegeben.

Unter welchen Bedingungen an $\Lambda = \Lambda(t,\vec{x})$ erfüllt das 4er-Potential $\mathcal{A}_{[\Lambda]}(t,\vec{x})$, das durch eine Eichtransformation aus $\mathcal{A}$ hervorgeht,

- die Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$,
- die temporale Eichung $\phi = 0$?
- $(Zusatzaufgabe)$ Geben Sie Glattheits- und Abfalleigenschaften für ρ und $\vec{j}$ an, die hinreichend dafür sind, dass die zuvor ermittelten Bedingungen an Λ erfüllt werden können, wenn vorausgesetzt wird, dass $\mathcal{A}$ ein elektrodynamisches Potential zu ρ und $\vec{j}$ ist, das der Lorentz-Eichung genügt.

Aufgabe 14

Zeigen Sie, dass Lösungen $u^{\pm}$ der inhomogenen Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,\vec{x}) - \Delta u(t,\vec{x}) = f(t,\vec{x})$$

erhalten werden durch

$$u^{\pm}(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f\left(t \pm \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}, \vec{y}\right)}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, d^3y\,,$$

wobei gutartige Glattheitseigenschaften von $f(t,\vec{x})$ sowie gutartige Abfalleigenschaften für $|\vec{x}| \to \infty$ vorausgesetzt seien, etwa $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$.

Aufgabe 15

Es sei eine Ladungsverteilung $\rho(t,\vec{x})$ und Stromdichte $\vec{j}(t,\vec{x})$ gegeben.

(a) Welche Gleichungen erfüllt das elektrodynamische Potential

$$\mathcal{A}(t,\vec{x}) = \begin{pmatrix} \phi(t,\vec{x}) \\ \vec{A}(t,\vec{x}) \end{pmatrix}$$

unter Annahme der Coulomb-Eichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$?

(b) Setzen Sie geeignete Glattheits- und Abfalleigenschaften bei ∞ für $\rho(t,\vec{x})$ und $\vec{j}(t,\vec{x})$ voraus, und geben Sie eine allgemeine Lösung für die Gleichungen für die Funktionen $\phi(t,\vec{x})$ und $\vec{A}(t,\vec{x})$ aus (a) im Fall der Coulomb-Eichung an. Benutzen Sie dazu das Ergebnis aus Aufgabe 14.

(c) Ermitteln Sie Lösungen $\phi(t,\vec{x})$ und $\vec{A}(t,\vec{x})$ für den Fall, dass ρ und $\vec{j}$ der Ladungsverteilung einer homogen geladenen Kugel mit Gesamtladung Q und Radius R_0 entspricht, deren Mittelpunkt die Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(\omega_0 t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt.

(d)$_{(Zusatzaufgabe)}$ Bestimmen Sie für den Fall (c) die zugehörigen Felder $\vec{E}(t,\vec{x})$ und $\vec{B}(t,\vec{x})$.

Aufgabe 16*$_{(Zusatzaufgabe)}$
Betrachten Sie die offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$U = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : r_0^2 \leqslant (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \leqslant R_0^2\}$$

mit

$$0 < r_0 < R_0 < \infty.$$

Auf U sei das Vektorfeld

$$\vec{R}(\vec{x}) = \frac{\kappa \vec{x}}{|\vec{x}|^3}, \qquad (\vec{x} \in U)$$

definiert ($\kappa \neq 0$ ist eine reelle Konstante).
Zeigen Sie: (i) $\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = 0$, (ii) Es gibt kein C^2-Vektorfeld $\vec{A}$ auf U mit $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{R}$.

[Wert jeder Aufgabe = 5 Punkte]

Abgabe: Am Mittwoch, den 28.5.2008 in der Vorlesung.