
Übungen zur Elektrodynamik Aufgabenblatt 2

Aufgabe 4

Es sei V^i ein Geschwindigkeitsvektorfeld der Volumenelementen einer rotierenden Kugel der Radius R :

$$V^i(\vec{x}) = \theta(R - |\vec{x}|) (\vec{\Omega} \times \vec{x})^i = \theta(R - |\vec{x}|) \varepsilon^{ijk} \Omega_j x_k,$$

mit einem vom Punkt unabhängigen Vektor $\vec{\Omega}$ (hier bezeichnet $\theta(\cdot)$ die Heaviside-Funktion). Zerlegen Sie das Vektorfeld $V^i(\vec{x})$ in eine Summe eines Gradienten und einer Rotation:

$$V^i = \partial^i \varphi + (\nabla \times A)^i \quad (0.1)$$

eines skalaren Potentials $\varphi(\vec{x})$ und eines Vektorpotentials $A^i(\vec{x})$. Dazu berechnen Sie die Divergenz (bezeichnet mit $4\pi\rho$)

$$4\pi\rho \equiv \partial_i V^i$$

und die Rotation (bezeichnet mit $4\pi\omega^i$)

$$4\pi\omega^i \equiv (\nabla \times V)^i$$

von V^i . Gehen Sie aus vom Ansatz (0.1), und stellen Sie zwei partielle Differentialgleichungen für φ und A^i auf. Die Gleichungen sind vom Poissonschen Typ. Bestimmen Sie die Lösungen dieser Gleichungen, zunächst formal mit Hilfe der Greenschen Funktionen, und dann auch explizit für die berechneten "Quellen" ρ, ω^i .

Hinweis: Bei der Aufstellung der Differentialgleichung für A^i darf die Annahme $\partial_i A^i = 0$ gemacht werden. Wieso wird die Allgemeinheit durch diese Annahme nicht eingeschränkt?

Aufgabe 5

Betrachten Sie die "Dipollösung" der Laplace-Gleichung in drei Dimensionen:

$$\varphi_D = \frac{\cos(\theta)}{r^2},$$

und berechnen Sie den Fluss des elektrischen Feldes, $E_i = -\partial_i \varphi$ durch die Halbsphäre $r = R, \theta \in [0, \pi/2], \varphi \in [0, 2\pi)$. Was würde passieren, wenn sich die Integrationsfläche über die ganze Sphäre erstreckt?

Aufgabe 6

Es sei $V_i = \partial_i \varphi$ ein Gradientenfeld in drei Dimensionen das aus zwei Anteilen

$$V_i = (V_\infty)_i + w_i,$$

besteht, wobei $(V_\infty)_i = \partial_i(x)$ ($= (1, 0, 0)$ in kartesischen Koordinate) den einzigen im Unendlichen nicht verschwindenden Anteil beschreibt. Bestimmen Sie einen im Unendlichen verschwindenden Anteil $w_i = \partial_i \psi$, so dass die Neumannsche Randbedingung

$$n^i V_i = 0, \quad \text{auf der Kugel } |\vec{x}| = R$$

für das Vektorfeld V_i erfüllt ist (hier bezeichnet $n_i = \partial_i r$ den zu der Sphäre $r = R$ normalen Einheitsvektor, und $\psi(\vec{x})$ eine Lösung der Laplace-Gleichung).

Hinweis zu allen Aufgaben: Bei den nicht in der VL definierten Begriffen wird die standard Wikipedia-Definition angenommen.

[Wert jeder Aufgabe = 5 Punkte]

Abgabe: Am Mittwoch, den 30.4.2008 in der Vorlesung.