

---

Übungen zur Elektrodynamik  
Aufgabenblatt 1

---

**Aufgabe 1**

Es sei  $\Delta$  der Laplace-Operator auf  $\mathbb{R}^3$  und  $L^2$  der Laplace-Operator auf einer Einheitskugel  $r = 1$ . Bestimmen Sie die Form von  $\Delta$ , in Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \varphi)$  und die Form von  $L^2$  in  $(\theta, \varphi)$ -Koordinaten (in geographischen Koordinaten). Zeigen Sie, dass

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \partial_r [r^2 \partial_r f] + \frac{L^2 f}{r^2},$$

für eine (genügend oft differenzierbare) Funktion  $f(r, \theta, \varphi)$  gilt.

*Hinweis:*

$$L^2 f = \frac{1}{\sin(\theta)} \partial_\theta [\sin(\theta) \partial_\theta f] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 f$$

**Aufgabe 2**

Mit Hilfe der in der Aufgabe 1 bewiesenen Formel und des Separationsansatzes

$$V_{\ell m}(r, \theta, \varphi) = R_\ell(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

bestimmen Sie die Lösungen der Laplacegleichung  $\Delta V = 0$ . Sie dürfen annehmen, dass die Form der Funktionen  $Y_{\ell m}$  bekannt ist (Kugelfunktionen) und dass  $L^2 Y_{\ell m} = -\ell(\ell + 1) Y_{\ell m}$ , und sollen  $R_\ell(r)$  bestimmen. Zerlegen Sie das Potential eines homogenen elektrischen Feldes,  $V_h(\vec{x}) = -x^1 = -r \sin \theta \sin \varphi$ , als Linearkombination der gefundenen Funktionen  $V_{\ell m}$ .

### Aufgabe 3

Berechnen Sie die Kurvenintegrale  $\int_{K_{\text{ont.}}} v_i dx^i$  des 2-dimensionalen Vektorfeldes,

$$v_\varphi = 1, \quad v_r = 0,$$

über die Konturen  $C$  und  $K$  (Abb. 1.). Berechnen Sie auch  $\text{rot } v$ . Im welchen Gebiet ist  $v_i$  ein Gradientenfeld?

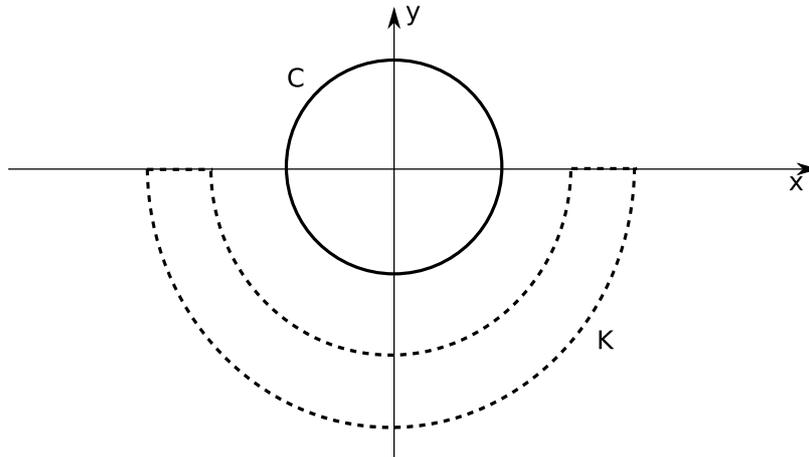


Abb.1. Konturen  $C$  und  $K$  in der Aufgabe 3 bestehen ausschließlich aus Kreisbögen  $r = \text{const}$  und (im Fall von  $K$ ) aus den Abschnitten  $y = 0, x \in [-r_2, -r_1] \cup [r_1, r_2]$ .

*Hinweis: Das Vektorfeld wurde in den Polarkoordinaten angegeben; Sie können entweder in den Polarkoordinaten oder in den Kartesischen Koordinaten rechnen.*

*Hinweis zu allen Aufgaben: Bei den nicht in der VL definierten Begriffen wird die standard Wikipedia-Definition angenommen.*

[Wert jeder Aufgabe = 5 Punkte]

**Abgabe: Am Mittwoch, den 23.4.2008 in der Vorlesung.**