UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik II

Übungsblatt 6

Montag, den 21. Mai 2007, in der Vorlesung

18. **Quantenteilchen in homogenen Magnetfelder - Teil 1**

Ein Quantenteilchen befindet sich auf einer Ebene (2D) in einem zu der Ebene senkrechten, homogenen Magnetfeld B. Setzen Sie in

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(-i\hbar\partial_x - \frac{e}{c}A_x\right)^2 + \left(-i\hbar\partial_y - \frac{e}{c}A_y\right)^2\right]$$

$\vec{A} = (0, B \cdot x, 0)$, und verwenden Sie den Ansatz

$$\psi = e^{ipy/\hbar} \cdot f(x)$$

um die Energieeigenzustände und deren Energien zu bestimmen.

Hinweis: das Problem bzgl. x lässt sich zu einem harmonischen Oszillator umformen.

19. **Quantenteilchen in homogenen Magnetfelder - Teil 2**

In einer anderen Eichung ist das Problem eines Teilchen im homogenen Magnetfeld symmetrischer:

$$\vec{A} = \tfrac{H}{2}(-y, x, 0)$$

Gehen Sie über zu dimensionslosen Koordinaten (x, y), und führen Sie die Variable $z = x + iy$ ein und

$$\partial = \frac{1}{2}\partial_x + \frac{1}{2i}\partial_y$$
$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}\partial_x - \frac{1}{2i}\partial_y.$$

Zeigen Sie, dass die Operatoren

$$a = -\overline{\partial} - z/2 \qquad\qquad b = \partial + \overline{z}/2$$
$$a^* = \partial - \overline{z}/2 \qquad\qquad b^* = -\overline{\partial} + z/2.$$

$[a, a^*] = 1$, $[b, b^*] = 1$, $[a, b] = 0 = [a, b^*]$ erfüllen. (Man darf annehmen, dass $\partial(\overline{z}) = 0$ und dass $\overline{\partial}\partial = \partial\overline{\partial}$, d.h. man soll z und $\overline{z}$ als unabhängige Koordinaten betrachten.) Darüber hinaus zeigen Sie dass:

$$
\begin{aligned}
K &= -i\hbar\partial_\varphi = z\partial - \overline{z}\overline{\partial} = \hbar(b^*b - a^*a), \\
H &= \hbar\omega_c(a^*a + \tfrac{1}{2})
\end{aligned}
$$

Jetzt kann das Problem algebraisch gelöst werden. Bestimmen Sie die Lösungen (Wellenfunktionen) und charakterisieren Sie deren Entartung (mit Hilfe der Eigenwerte von K).

Wichtig! *In beiden Teilen lösen Sie zusätzlich das ensprechende klassische Problem (d.h. für klassische Teilchen). Die Quantenzustände sind hoch-entartet. Charakterisieren Sie die Entartung der Grundzustände. Überlegen Sie sich in welchem Raumgebiet die Wellenfunktionen wesentlich lokalisiert sind, und berechnen Sie die Erwartungswerte der quantenmechanischen elektrischen Ströme*

$$
j^i_\psi = \frac{1}{2m}\left[\overline{\psi}\Pi^i\psi + \overline{\Pi^i\psi}\psi\right],
$$

mit

$$
\Pi^i = \left(-i\hbar\partial^i - \frac{e}{c}A^i\right).
$$